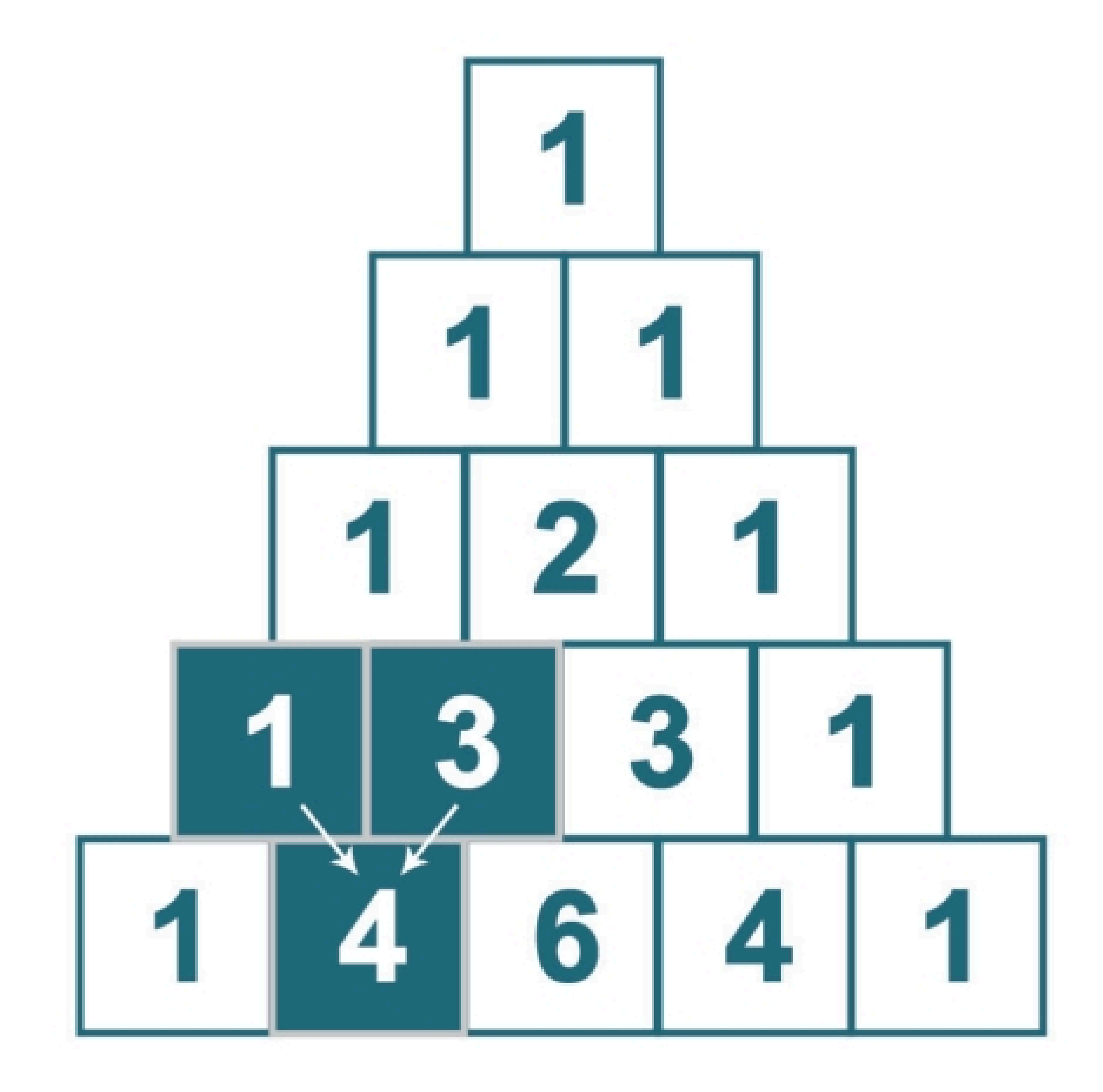
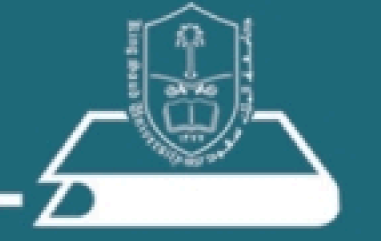
مقدمة في

نظرية التركيبات



تأليف

د. أحمد حميد شراري   د. محمد عبدالعزيز الزهيري



جامعة الملك سعود
النشر العلمي والمطابع



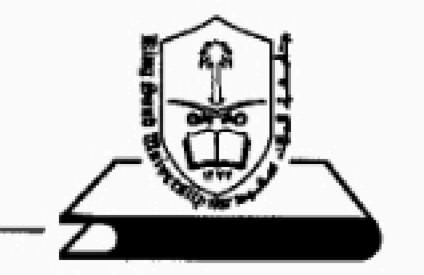
مقدمة في

نظرية التركيبات

تأليف

الدكتور أحمد حميد شراري

الدكتور محمد عبدالعزيز الزهيري



النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

شراري ، أحمد حميد

مقدمة في نظرية التركيبات. /أحمد حميد شراري ؛ محمد عبدالعزيز الزهيري – الرياض ، ١٤٣٢هـ

١٩٤ص ؛ ١٧سم × ٢٤سم

ردمك : ٥- ٨٣٢- ٥٥- ٩٩٦٠- ٩٧٨

١- الرياضيات أ- الزهيري، محمد عبدالعزيز (مؤلف مشارك)
ب – العنوان

ديوي ،٥١٠ ١٤٣٢/٦١٥٨

رقم الإيداع : ١٤٣٢/٦١٥٨

ردمك : ٥- ٨٣٢- ٥٥- ٩٩٦٠ - ٩٧٨

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره – بعد اطلاعه على تقارير المحكمين – في اجتماعه الحادي عشر للعام الدراسي ١٤٣٢/١٤٣١هـ، الذي عقد بتاريخ ١٤٣٢/٣/١٠هـ، الموافق١٣/٢/٢٠١١م.



النشر العلمي والمطابع ١٤٣٢هـ

المقدمة

تعتبر نظرية التركيبات من فروع الرياضيات التي تشهد اهتماماً كبيراً وتطوراً سريعاً في وجهيها النظري والتطبيقي. ويعود ذلك إلى تطبيقاتها الكثيرة في ميادين متنوعة كعلوم الحاسوب والاتصالات والنقل وعلم الجينات وتصميم التجارب والجدولة.

تعالج نظرية التركيبات ثلاثة أنواع رئيسة من المسائل: مسائل الوجود، مسائل العد والسرد، مسائل الإنشاء. وتبحث هذه المعالجة عن إجابات للأسئلة: هل يوجد تشكيل تركيبي من نوع معين؟ كم عدد هذه التشكيلات التركيبية وهل يمكن سردها؟ كيف نختار من بين التشكيلات التركيبية المكنة تشكيلاً أمثلياً بالنسبة إلى معيار ما؟ ويلاحظ أنه عندما تكون مسألة الوجود سهلة فإن الاهتمام ينصب على مسألة العد والسرد، وعلى الرغم من أن معظم النتائج المعروفة يتعلق بالعد إلا أن أهمية السرد بدأت تتجلى حديثاً لعلاقته بعلم الحاسوب. وعندما تكون مسألة الوجود صعبة فغالبا ما تكون مسألة العد والسرد ذات أهمية متدنية. وفي مسألة الإنشاء فإننا نبحث عن خوارزمية جيدة لإيجاد حل أمثلي بالنسبة إلى شروط معينة مسبقاً.

يقدم هذا الكتاب مدخلاً إلى مسألتي الوجود والعد حيث يعرض الأساسيات التي لا تستند إلى مواضيع متقدمة في الرياضيات. و يعالج التفكير التركيبي مسألة العد ضمنياً باستخدام فكرة التقابل لاختزال مسائل معطاة إلى مسائل محلولة مسبقاً. نبدأ باستعراض مبادئ العد الأساسية، نموذج العينة للعد، مسألة عدد الحلول في الأعداد الصحيحة لمعادلة خطية. ثم ننتقل إلى تقديم أدوات أكثر فعالية في معالجة مسائل العد. في الحقيقة، نقدم مبدأ التضمين والإقصاء، الدوال المولّدة، العلاقات الارتدادية، بقدر مناسب من التفصيل. بعد ذلك، ننتقل إلى مسائل الوجود عبر تقديم مبدأ برج الحمام وأعداد رمزي؛ ولكننا لا نتطرق إلى مواضيع مهمة مثل تصميم التجارب. وفي الفصل الأخير، نقدم مدخلاً إلى نظرية بوليا للعد حيث نفترض أن القارئ على دراية بمبادئ نظرية الزمر.

وسيقدر المؤلفان أي ملاحظات تبدى من قراء هذا الكتاب؛ ويمكن إرسال أي تعليقات أو اقتراحات عبر البريد الالكتروني zohairi@ksu.edu.sa.

وفي الختام نأمل أن نكون قد وفقنا في تقديم مدخل سهل على نظرية التركيبات وأن يكون هذا الكتاب إضافة علمية إلى ما كتب بالعربية، والله من وراء القصد.

المؤلفان

المحتويات

الفصل الثاني: مبدأ التضمين والإقصاء

الفصل الثالث: الدوال المولدة

الفصل الرابع: العلاقات الارتدادية

الفصل الخامس: مبدأ برج الحمام وأعداد رمزي

الفصل السادس: نظرية بوليا

الفصل الأول

مبادئ العدّ الأساسية

BASIC COUNTING PRINCIPLES

يعتبر العدّ هدفاً أساسياً في دراسة نظرية التركيبات. تدعى نظرية التركيبات أحياناً "فن العد" لأننا نعدّ عناصر مجموعة منتهية دون أن نكتب عناصرها في قائمة مفصلة. يهدف هذا الفصل إلى التعرف على صور العد الست القياسية. هذه المسائل الست إضافةً إلى مبادئ المجموع وحاصل الضرب والتقابل تمثل الأدوات الرئيسة لحل معظم مسائل هذا الكتاب.

وهذه المسائل الست يمكن النظر إلى أربع منها (المتتاليات، التباديل، التركيبات، المجموعات المضاعفة) من خلال نموذجين: نموذج العينة للعد ونموذج التوزيع للعد[١]، وأمّا المسألتان المتبقيتان (تجزئة المجموعات، تجزئة الأعداد الصحيحة) فلا يمكن النظر إليهما إلا من خلال نموذج التوزيع للعدّ.

---

[١] هذان النموذجان ليسا الوحيدين للعد. هناك نموذج الدوال للعدّ الذي يعد صياغة دقيقة لنموذج التوزيع للعد . انظر البند الرابع من الفصل الأول في المرجع [5].

(١,١) مبدأ المجموع ومبدأ حاصل الضرب

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعات منتهية تحقق $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ ، فإن $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$. يسمى هذا المبدأ **مبدأ المجموع** The Rule of Sum.

يمكن إثبات مبدأ المجموع بواسطة الاستقراء الرياضي على k ، ونترك ذلك للقارئ.
غالباً ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ المجموع عند حل المسائل: إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز أي من المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، وإذا كان لا يمكن إنجاز A_i و A_j في الوقت نفسه لكل $i \neq j$ وكان عدد طرق إنجاز A_t هو n_t لكل عدد صحيح $1 \leq t \leq k$ ، فإن عدد طرق إنجاز A هو $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعات منتهية فإن $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$. يسمى هذا المبدأ **مبدأ حاصل الضرب** The Rule of Product. يمكن إثبات مبدأ حاصل الضرب بواسطة الاستقراء الرياضي على k ، ونترك ذلك للقارئ.

غالباً ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ حاصل الضرب عند حل المسائل: إذا كان إنجاز المهمة A يتطلب إنجاز المتتالية التالية من المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ، (A_1 أولاً ثم A_2 ثانياً وهكذا) وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمة A_j لا يعتمد على الكيفية التي تمّ بها إنجاز المهمات $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}$ لكل عدد صحيح $2 \leq j \leq k$ ، وكان عدد طرق إنجاز A_j هو n_j فإن عدد طرق إنجاز A هو $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

مثال(١,١)

لتكن Σ أبجدية عدد حروفها m. جد $|\Sigma_n|$ حيث Σ_n هي مجموعة الكلمات التي طولها n والتي حروفها من الأبجدية Σ.

الحل

لتكن $w = x_1x_2\cdots x_n$ كلمة من Σ_n. عدد طرق اختيار الحرف x_i هو m لكل $1 \le i \le n$، كما أن اختيار الحرف x_i لا يعتمد على اختيار الحروف التي قبله. إذن، استناداً إلى مبدأ حاصل الضرب $|\Sigma_n| = m^n$.

مثال(١,٢)

يعمل في مستشفى 4 أطباء و 7 ممرضين و 3 فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مؤلف من طبيب وممرض وفني؟

الحل

يمكن اختيار الطبيب بأربع طرق ويمكن اختيار المرض بسبع طرق ويمكن اختيار الفني بثلاث طرق. استناداً إلى مبدأ حاصل الضرب عدد الطرق المكنة هو

$$4 \cdot 7 \cdot 3 = 84$$

مثال(١,٣)

كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع رقميه عدداً فردياً؟

الحل

ليكن y هو رقم الآحاد و x هو رقم العشرات. نبدأ باختيار x. يمكن اختيار x من المجموعة $\{1,2,\ldots,9\}$ وبالتالي فإن عدد طرق اختيار x هو 9. إذا كان x

فردياً فإنه يمكن اختيار y من المجموعة $\{0,2,4,6,8\}$، أما إذا كان x زوجياً فإنه يمكن اختيار y من المجموعة $\{1,3,5,7,9\}$ وبالتالي فإن عدد طرق اختيار y بعد اختيار x هو 5. إذن عدد الأعداد المطلوبة هو $9\cdot5=45$. لاحظ أنه لو بدأنا باختيار y فإن عدد طرق اختيار x بعد اختيار y ليس ثابتاً.

(١,٢) مبدأ التقابل

إذا كان $f:A\to B$ تقابلاً من المجموعة A إلى المجموعة B فإن $|A|=|B|$.

(١,٣) نموذج العينة للعدّ

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. إن أخذ عينة من A يعتمد على الإجابة عن السؤالين التاليين:

الأول: هل ترتيب العناصر مهم في هذه العينة أم لا؟

الثاني: هل تكرار ظهور عنصر في العينة مقبول أم لا؟

إذن، لدينا أربع حالات يوضحها المثال التالي، سنتحدث عن كل منها.

مثال(١,٤)

لتكن لدينا المجموعة $A=\{a_1,a_2,a_3\}$. يوضح الجدول المعطى أدناه العينات المكونة من عنصرين والمأخوذة من A

	التكرار مقبول	التكرار غير مقبول
الترتيب مهم	$a_1a_1, a_1a_2, a_1a_3,$ $a_2a_1, a_2a_2, a_2a_3,$ a_3a_1, a_3a_2, a_3a_3	$a_1a_2, a_1a_3, a_2a_1,$ a_2a_3, a_3a_1, a_3a_2
الترتيب غير مهم	$\{a_1,a_2\}$ $\{a_1,a_1\}$ $\{a_2,a_2\}$ $\{a_1,a_3\}$ $\{a_3,a_3\}$ $\{a_2,a_3\}$	$\{a_1,a_3\}$ $\{a_1,a_2\}$ $\{a_2,a_3\}$

ملاحظة

فيما يلي سنصطلح على أن عدد العينات التي عدد عناصرها 0 يساوي 1.

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **متتاليةً** طولها r (أو متتاليةٌ مكونة من r عنصراً) r- sequence من A إذا كان يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل $x_1x_2\ldots x_r$. بمناقشة مماثلة لما فعلنا في مثال(١,١) يمكن إثبات أن عدد المتتاليات التي طولها r من مجموعة سعتها (أي، عدد عناصرها) n هو n^r.

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **تبديلاً** طوله r، (أو تبديلاً مكوناً من r عنصراً) r- permutation من A إذا كان لا يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل $x_1x_2\ldots x_r$.

مبرهنة(١,١)

إذا كان $1 \le r \le n$ ، فإن عدد التباديل التي طولها r من مجموعة عدد عناصرها n هو $n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

البرهان

لتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة وليكن $p = x_1 x_2 \ldots x_r$ تبديلاً من الطول r من A . لاحظ أن:

1- عدد طرق اختيار x_1 هو n.

2- عدد طرق اختيار x_2 هو $n-1$ بغض النظر عن الكيفية التي اختير بها x_1.

3- عدد طرق اختيار x_3 هو $n-2$ بغض النظر عن الكيفية التي اختير بها x_1, x_2.

$\vdots$

r– عدد طرق اختيار x_r هو $n-r+1$ بغض النظر عن الكيفية التي اختير بها $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$.

إذن، حسب مبدأ حاصل الضرب يكون عدد التباديل التي طولها r من A هو $n(n-1)\cdots(n-r+1)$. □

نرمز لعدد التباديل التي طولها r من مجموعة سعتها n عادةً بالرمز $(n)_r$ أو بالرمز $P(n,r)$. لاحظ أن

$$(n)_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

لتكن $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة. أي مجموعة جزئية من A من السعة r ‏ r- subset يمكن النظر إليها على أنها عينةٌ من A سعتها r الترتيبُ فيها

غير مهم ولا يسمح فيها بالتكرار. تسمى المجموعة الجزئية أحياناً **توفيقاً** أو **تركيباً** combination.

مبرهنة(١,٢)

إذا كان $0 \le r \le n$ ، فإن عدد المجموعات الجزئية التي سعتها r من مجموعة عدد عناصرها n هو $\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

البرهان

إذا كان $r = 0$ فإن المجموعة الجزئية الخالية هي الوحيدة التي لا تحوي عناصر.

نفرض أن $r > 0$. لاحظ أن أي مجموعة جزئية عدد عناصرها r تقابل $r!$ تبديلاً مختلفاً في مجموعة التباديل التي طولها r. كذلك يمكننا الحصول على $r!$ تبديلاً مختلفاً من أي مجموعة جزئية عدد عناصرها r. وبناء عليه فإن

$r! \times$ (عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها r) = عدد التباديل التي طولها r

من مبرهنة(١,١) نستنتج أن عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها r يساوي $\frac{n!}{r!(n-r)!}$. □

يُرمز لعدد المجموعات الجزئية التي سعتها r من مجموعة سعتها n بالرمز $\binom{n}{r}$ أو بالرمز $C(n,r)$.

مثال(١,٥)

إذا كانت ورقة اختبار تحوي 7 أسئلة وكان على الطالب أن يجيب عن 5 أسئلة فقط، فبكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب عن الاختبار؟

الحل

عدد طرق الإجابة هو $21 = \binom{7}{5}$.

مثال(١,٦)

يعمل 12 مهندساً في شركة، ومن أجل تنفيذ أحد المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مؤلف من 5 مهندسين.

(أ) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل؟

(ب) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا أصر اثنان من المهندسين على العمل معاً؟

(ج) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا رفض مهندسان أن يعملا معاً؟

الحل

(أ) عدد الطرق الممكنة هو $792 = \binom{12}{5}$.

(ب) ليكن المهندسان اللذان يصران على العمل معاً هما a و b. إذا كان a و b ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{3}$، أما إذا كان

الفريق المختار لا يتضمن كلاً من a و b فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو $\binom{10}{5}$. بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أن عدد الطرق الممكنة هو

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{5}=120+252=372$$

(ج) ليكن المهندسان اللذان يرفضان العمل معاً هما a و b. إذا كان a ضمن الفريق المختار فإن b ليس ضمن هذا الفريق وبالتالي فإن عدد الطرق في هذه الحالة هو $\binom{10}{4}$. بالمثل إذا كان b ضمن الفريق المختار فإن عدد الطرق هو $\binom{10}{4}$. أما إذا كان الفريق لا يتضمن كلاً من a و b فإن عدد الطرق هو $\binom{10}{5}$. بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أن عدد الطرق الممكنة هو:

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=210+210+252=672 .$$

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. نسمي العينة **مجموعة جزئية مضاعفة** سعتها r ‎r- multiset‎ من A إذا كان الترتيبُ فيها غير مهم ويسمح فيها بالتكرار ونكتبها على الشكل $\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$.

وفقاً لما ذكر أعلاه فإن $M=\{a,a,b,c,c,c,d\}$ مجموعة جزئية مضاعفة سعتها 7 وفيها تكرار كل من a,b,c,d يساوي 2,1,3,1 على الترتيب. كذلك نكتب M على الشكل $M=\{2*a,b,3*c,d\}$.

مثال(١,٧)

المجموعات الجزئية المضاعفة التي سعتها 3 من $\{a,b,c\}$ هي:

$\{a,a,a\},\{a,a,b\},\{a,a,c\},\{a,b,c\},\{b,b,b\},\{b,b,a\},\{b,b,c\},$

$\{c,c,c\},\{c,c,a\},\{c,c,b\}.$

كل متتالية مكونة من جميع عناصر المجموعة المضاعفة A تسمى **تبديلاً لـِ** A.

فمثلاً، تباديل $A=\{a,b,b\}$ هي abb و bab و bba.

مبرهنة(١,٣)

عدد المجموعات الجزئية المضاعفة التي سعتها r من مجموعة سعتها n يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

البرهان

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة. لكل مجموعة جزئية مضاعفة سعتها r من A، نكون جدولاً مكوناً من n عموداً وسطرين. نضع في مستطيلات السطر الأول من اليسار إلى اليمين $a_1,a_2,\ldots,a_n$ على الترتيب، ولكل $i=1,2,\ldots,n$ نضع في المستطيل أسفل a_i نجوماً عددها يساوي تكرار a_i في المجموعة المضاعفة. لاحظ أن عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني يساوي r. فمثلاً المجموعة الجزئية المضاعفة $\{a_1,a_1,a_1,a_3\}$ من المجموعة $\{a_1,a_2,a_3\}$ يقابلها الجدول

a_1	a_2	a_3
***		*

وبالعكس، أي جدول عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني فيه r تقابله مجموعة مضاعفة من A سعتها r. عليه، يوجد تقابل بين المجموعات المضاعفة والجداول. لحساب عدد الجداول نعمل التغيير التالي في الجدول:

نحذف الخطوط الأفقية الثلاثة كما نحذف العناصر من الصف الأول والخطين الرأسيين الأول والأخير من الجدول. فمثلاً الجدول أعلاه يصبح بعد التغيير *||*** وبالعكس **|**| يقابل المجموعة المضاعفة $\{a_2, a_2, a_3, a_3\}$. إذن عدد المجموعات المضاعفة التي سعتها r يساوي عدد المتتاليات المكونة من r نجمة و$n-1$ خطاً رأسياً. نحسب عدد هذه المتتاليات كما يلي: لدينا $n-1+r$ مكاناً وإذا اخترنا r مكاناً للنجوم فستكون الأمكنة المتبقية للخطوط الرأسية. وبما أن عدد طرق اختيار r مكاناً من $n-1+r$ مكاناً هو $\binom{n-1+r}{r}$ فإن عدد المجموعات المضاعفة التي سعتها r هو $\binom{n-1+r}{r}$.

تمارين (١,١)

١- (أ) كم عدداً صحيحاً يقع بين 1 و99 بحيث رقماه مختلفان؟

(ب) كم عدداً صحيحاً زوجياً يقع بين 1 و99 بحيث رقماه مختلفان؟

(ج) كم عدداً صحيحاً فردياً يقع بين 1 و99 بحيث رقماه مختلفان؟

٢- إذا كانت $B = \{100, 101, \ldots, 999\}$ فما هو عدد الأعداد الفردية التي تنتمي إلى B وأرقامها مختلفة؟

٣- إذا كانت $B = \{1000, 1001, \ldots, 9999\}$ فما هو عدد الأعداد الفردية التي تنتمي إلى B وأرقامها مختلفة؟

٤- رميت قطعة نقد ثلاثين مرة، كم عدد المتتاليات الممكنة لظهور الصورة والكتابة؟

٥- كم طريقة مختلفة ممكنة للإجابة عن عشرين سؤالاً إذا كـان يمكـن الإجابـة عـن أي منها بنعم أو لا؟

٦- كم طريقة مختلفة ممكنة للإجابة عن أسئلة امتحان مكون من خمسين سـؤالاً إذا كان لكل إجابة سؤال من العشرين الأولى ثلاثة خيارات ولكـل إجابـة سـؤال مـن الثلاثين الباقية خمسة خيارات؟

٧- كم عدد طرق ترتيب حروف كلمة COMPUTER

(أ) إذا كانت حروف العلة متجاورة؟

(ب) إذا كان الحرف P يظهر إلى يسار T؟

(ج) إذا كان هناك حرفين فقط بين M وC؟

٨- احسب $\binom{5}{2}\binom{7}{3}$ ، $\binom{8}{1}$ ، $\binom{10}{7}$.

٩- بسط $\binom{n}{n}$ ، $\binom{n}{n-1}$ ، $\binom{n}{1}$ ، $\binom{n}{0}$.

١٠- جد $(n)_1$ ، $(7)_6$ ، $(8)_4$ ، $(8)_3$.

١١- وضح أن $(n)_n = (n)_{n-1}$.

١٢- وضح أن $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

١٣- أثبت أن $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$.

١٤- مستخدماً تمرين ١٣ ، أثبت أن $\binom{2n}{n}$ عدد زوجي إذا كان $n \geq 1$.

١٥- أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب n يوجـد n مـن الأعـداد المؤلفـة المتعاقبـة (يسمى العدد الصحيح الموجب مؤلفاً إذا كان غير أولي وأكبر من 1).

[إرشاد: ادرس الأعداد $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \cdots, (n+1)!+(n+1)$]

١٦- بكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس n فرداً حول طاولة مستديرة؟ (يقال إن الطريقتين مختلفتان إذا كان لا يمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بوساطة دوران ما.)

١٧- تستخدم سفينة إرسال إشارات برفع سبعة أعلام متتابعة على سارية. كم إشارة مختلفة يمكن إرسالها بخمسة أعلام مختلفة ألوانها؟

١٨- بكم طريقة يمكن أن تصطف أربع سيارات حمراء متطابقة وأربع سيارات بيضاء متطابقة بحيث لا تتجاور سيارتان لهما اللون نفسه؟

١٩- بكم طريقة يمكن أن تصطف أربع سيارات حمراء مختلفة وأربع سيارات بيضاء مختلفة بحيث لا تتجاور سيارتان حمراوان؟

٢٠- كم عدد الكلمات المكونة من خمسة أحرف من الأبجدية العربية إذا كان لا يسمح بتكرار الحرف؟

٢١- طالب لديه 25 من الكتب المختلفة ولديه رف يتسع فقط لعشرة كتب. بكم طريقة يمكنه أن يصف عشرة من كتبه على الرف؟

٢٢- كم عدد تباديل $\{1,2,\cdots,n\}$ التي تثبت العدد 1؟

٢٣- بكم طريقة يمكن تجزئة 12 عنصراً مختلفاً إلى ثلاث مجموعات تتكون كل منها من أربعة عناصر؟

٢٤- بكم طريقة يمكن تجزئة $2n$ عنصراً مختلفاً إلى n مجموعة تتكون كل منها من عنصرين؟

٢٥- بكم طريقة يمكن تجزئة mn عنصراً مختلفاً إلى m مجموعة عدد عناصر كل منها n؟

٢٦- أثبت أن $r!$ يقسم حاصل ضرب أي r من الأعداد الصحيحة الموجبة المتعاقبة. [إرشاد: ادرس طرق اختيار r عنصراً من مجموعة عدد عناصرها $n+r-1$]

٢٧- n عصا مختلفة كسر كل منها إلى جزئين طويل وقصير. بكم طريقة يمكن تكوين n زوجاً من الأجزاء بحيث كل زوج يتكون من جزء قصير وآخر طويل؟

٢٨- شركة حلويات تضع في كيس مجموعة من 10 أصابع من الشوكلاته تختارها من بين ثلاثة أنواع.

(أ) بكم طريقة يمكن أن تكون هذه المجموعة؟

(ب) كم عدد المجموعات التي تحوي على الأقل واحداً من كل نوع؟

٢٩- لتكن A مجموعة عدد عناصرها m و B مجموعة عدد عناصرها n.

(أ) جد عدد العلاقات التي يمكن تعريفها من A إلى B.

(ب) جد عدد الدوال التي يمكن تعريفها من A إلى B.

(ج) جد عدد الدوال الأحادية التي يمكن تعريفها من A إلى B.

(د) جد عدد دوال التقابل التي يمكن تعريفها من A إلى B.

٣٠- لتكن A مجموعة عدد عناصرها n.

(١) جد عدد العلاقات التي يمكن تعريفها على A.

(٢) جد عدد العلاقات R على A في الحالات التالية:

(أ) R انعكاسية (ب) R تناظرية (ج) R انعكاسية وتناظرية (د) R تخالفية.

٣١- جد عدد المتجهات $v=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ **في الحالات التالية :**

(أ) $\alpha_i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$.

(ب) $\alpha_i \in \{0,1,\ldots,k_i-1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$.

(ج) $\alpha_i \in \{0,1\}$ لكل $i=1,2,\ldots,n$ و $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$.

٣٢- إذا كان $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ تحليلاً للعدد n إلى عوامله الأولية فجد

(أ) عدد قواسم n .

(ب) عدد قواسم n التي لا يقسمها أي مربع كامل مختلف عن 1.

٣٣- إذا كان p عدداً أولياً فأثبت أن p يقسم $\binom{p}{k}$ لكل عدد صحيح $0<k<p$.

(١,٤) مبرهنة ذات الحدين

في هذا البند سنقدم مبرهنة ذات الحدين و التي يمكن النظر إليها كتطبيق من تطبيقات التوافيق. كما سنقدم مبرهنة متعددة الحدود و التي تعتبر تعميماً لمبرهنة ذات الحدين.

مبرهنة(١,٤) (متطابقة باسكال)

إذا كان $n\geq k$ عددين صحيحين موجبين، فإن $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

البرهان

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة عدد عناصرها n . ولتكن B مجموعة جزئية من A عدد عناصرها k . لدينا حالتان: إما $a_n\in B$ أو $a_n\notin B$. حسب مبدأ

المجموع فإن عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k يساوي عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي لا تحوي a_n مضافاً إليه عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي تحوي a_n.

عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي لا تحوي a_n يساوي عدد المجموعات الجزئية من $A-\{a_n\}$ من السعة k، إذن يساوي $\binom{n-1}{k}$.

عدد المجموعات الجزئية من A من السعة k والتي تحوي a_n يساوي عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ من السعة $k-1$، إذن يساوي $\binom{n-1}{k-1}$. عليه، $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$. □

باستخدام متطابقة باسكال يمكن إنشاء مثلث باسكال الذي يتكون من قيم $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

مبرهنة(١,٥) (مبرهنة ذات الحدين)

لأي عددين حقيقين x, y، وأي عدد صحيح غير سالب n، فإن

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n. المبرهنة صحيحة عندما $n = 0$ لأن الطرف الايسر يساوي $(x+y)^0 = 1$ ، كما أن الطرف الأيمن يساوي $\binom{0}{0}x^0y^0 = 1$.

لنفرض صحة المبرهنة عندما $n = k \geq 0$ ، أي أن:

$$(x+y)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k}y^k$$

نريد إثبات صحة المبرهنة عندما $n = k+1$. أي نريد إثبات أن

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1}$$

لاحظ أن $(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k$.

ومن فرضية الاستقراء

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k}y^k]$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \cdots + \binom{k}{k-1}x^2y^{k-1} + \binom{k}{k}xy^k$$

$$+ \binom{k}{0}x^k y + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \{\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\}x^k y + \{\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\}x^{k-1}y^2 + \cdots +$$
$$\{\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

$$=\binom{k+1}{0}x^{k+1}+\binom{k+1}{1}x^{k}y+\binom{k+1}{2}x^{k-1}y^{2}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}y^{k+1}$$

علماً أننا حصلنا على المساواة الأخيرة باستخدام متطابقة باسكال. □

لاحظ أن عدد الحدود المختلفة في مفكوك $(x+y)^n$ يساوي $n+1$.

تسمى المتسلسلة

$$1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

متسلسلة ذات الحدين (The Binomial Series). ومن حساب التفاضل نعلم أنه إذا كان $|x|<1$ فإنه لكل عدد حقيقي $k\in\mathbb{R}$ يكون

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$$

حيث n عدد صحيح و

$$\binom{k}{n}=\begin{cases}0 & ,n<0\\ 1 & ,n=0\\ \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} & ,n>0\end{cases}$$

هي معاملات ذات الحدّين المعممة (Generalized Binomial Coefficients). وبغرض الاستخدام في الفصل المتعلق بالدوال المولِّدة نجد الآن مفكوك $(1-x)^{-m}$ حيث m عدد صحيح موجب كما يلي:

$$(1-x)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-m}{n}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!}\;x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\;x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m+n-1)\cdots(m+1)m}{n!}\;x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\;x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}\;x^n.$$

مثال(١,٨)

جد مفكوك $(x+y)^3$.

الحل

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\binom{3}{3}y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

مثال(١,٩)

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

مثال(١,١٠)

أثبت أن

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$$

الحل

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots$$

ومنه

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

وبالتعويض في مثال(١,٩) نجد أن

$$2^n = 2\{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\}$$

إذن

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$$

مبرهنة(١,٦)

إذا كان لدينا n من العناصر المأخوذة من k نوعاً بحيث عدد العناصر المأخوذة من النوع رقم i هو r_i لكل $1 \le i \le k$، فإن عدد تباديل هذه العناصر يساوي

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

أي، عدد تباديل المجموعة المضاعفة $M = \{r_1 * a_1, r_2 * a_2, \ldots, r_k * a_k\}$ التي عدد عناصرها $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ يساوي $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$.

البرهان

لدينا n مكاناً. للعناصر من النوع الأول والتي عددها r_1 يمكن أن نختار r_1 مكاناً من n مكاناً بـ $\binom{n}{r_1}$ طريقة. للعناصر من النوع الثاني والتي عددها r_2 يمكن أن نختار r_2 مكاناً من $n - r_1$ مكاناً بـ $\binom{n-r_1}{r_2}$ طريقة. وعموماً للعناصر من النوع رقم i والتي عددها r_i يمكن أن نختار r_i مكاناً من $n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{i-1}$ مكاناً بـ $\binom{n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{i-1}}{r_i}$ طريقة، لكل $2 \le i \le k$. ومن مبدأ حاصل الضرب ينتج المطلوب.

مثال(١,١١)

كم عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف كلمة ABACDDEFA؟

الحل

$$\frac{9!}{3!1!.1!2!1!1!} = \frac{9!}{3!2!} = 30240 \ .$$

مبرهنة(١,٧) (مبرهنة متعددة الحدود)

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ أعداداً حقيقية وكان n عدداً صحيحاً غير سالب، فإن:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$$

حيث الجمع مأخوذ على كل الأعداد الصحيحة غير السالبة $r_1, r_2, \ldots, r_m$ التي تحقق $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ ؛ وحيث $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_m!}$.

البرهان

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \quad (n \text{ مرة})$$

ومنه أي حدّ من حدود المفكوك يكون من الشكل $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ حيث $r_1, r_2, \ldots, r_m$ أعداد صحيحة غير سالبة تحقق $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. معامل هذا الحدّ هو عدد تباديل r_1 عنصراً من النوع x_1 و r_2 عنصراً من النوع x_2 و ... و r_m عنصراً من النوع x_m. من مبرهنة(١,٦) يكون معامل $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ هو $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$. □

لاحظ أنه إذا وضعنا $m = 2$ في مبرهنة(١,٧) فإننا نحصل عل مبرهنة ذات الحدين. كذلك عدد الحدود المختلفة في مفكوك $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ هو $\binom{m-1+n}{n}$ وذلك لأن عدد حلول $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$ في الأعداد الصحيحة غير السالبة يساوي $\binom{m-1+n}{n}$ كما سنثبت لاحقاً في نتيجة(١,١٠).

مثال(١,١٢)

جد مفكوك $(x + y + z)^2$.

الحل

عدد الحدود في المفكوك هو $6 = \binom{4}{2} = \binom{3-1+2}{2}$. من مبرهنة متعددة الحدود نجد أن

$$(x + y + z)^2 = \binom{2}{2,0,0}x^2 + \binom{2}{0,2,0}y^2 + \binom{2}{0,0,2}z^2 + \binom{2}{1,1,0}xy + \binom{2}{1,0,1}xz + \binom{2}{0,1,1}yz$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz.$$

تمارين(١,٢)

١- استخدم مبرهنة ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x - 2)^5$.

٢- استخدم مبرهنة ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x + 1)^6$.

٣- استخدم مبرهنة متعددة الحدود لإيجاد مفكوك $(x + y + z)^4$.

٤- ما هو معامل $x^3y^2z^5$ في مفكوك $(x + y + z)^{10}$؟

٥- كم عدد حدود مفكوك $(x+y+z)^{70}$؟

٦- باستخدام مبرهنة ذات الحدين أثبت أن: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$.

٧- أوجد قيمة x إذا كان $\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}8^k = x^{100}$.

٨- كم عدد تباديل حروف كلمة MISSISSIPPI بحيث I لا يجاور I؟

٩- كم عدد تباديل حروف كلمة ILLINOIS بحيث لا يظهر I إلى يسار L؟

١٠- كم عدد المتتاليات الثنائية (أي، المأخوذة من المجوعة $\{0,1\}$) من الطول n والتي تحوي عدداً زوجياً من الأصفار وعدداً فردياً من الرقم 1؟

١١- كم عدد المتتاليات الثنائية من الطول n و التي تحوي عدداً زوجياً من الأصفار وعدداً زوجياً من الرقم 1؟

١٢- لأي عدد صحيح موجب n، أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}2^{n-k} = n3^{n-1}$.

١٣- أعط برهاناً تركيبياً للمتطابقة $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

١٤- أعط برهاناً تركيبياً للمتطابقة $\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$.

١٥- أعط برهاناً تركيبياً للمتطابقة $\binom{n+1}{r+1} = \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r}$.

١٦- أثبت أن

$$\binom{r}{k} - \binom{r}{k+1} + \binom{r}{k+2} - \binom{r}{k+3} + \cdots + (-1)^{r-k}\binom{r}{r} = \binom{r-1}{k-1}.$$

[إرشاد: استخدم متطابقة باسكال]

١٧- اكتب مفكوك $2^p = (1+1)^p$ ثم أثبت أن $p \mid (2^p - 2)$ ، حيث p عدد أولي.

١٨- أثبت أن $\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$. تسمى هذه المتطابقة صيغة فاندرمند للالتفاف (Vandermonde's convolution formula).

(١,٥) نموذج التوزيع للعدّ

يهدف هذا البند إلى تقديم نموذج التوزيع للعد (The distribution model of counting). ليكن لدينا r كرة نريد توزيعها على n صندوقاً، ثلاثة أسئلة مهمة في هذا السياق:

الأول: هل الكرات مختلفة أم متطابقة؟

الثاني: هل من الممكن أن يحوي الصندوق أكثر من كرة؟

الثالث: هل الصناديق مختلفة أم متطابقة؟

في هذا البند سنفرض أن الصناديق مختلفة. إذن، لدينا أربع حالات يوضحها المثال التالي:

مثال(١,١٣)

يوضح الجدول التالي كل التوزيعات المكنة لكرتين على ثلاثة صناديق مختلفة.

	لا شروط على عدد الكرات في كل صندوق	كل صندوق يحوي كرة على الأكثر
الكرات مختلفة	$\lfloor b_1,b_2 \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b_1,b_2 \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b_1,b_2 \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor\lfloor b_2 \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor\lfloor b_1 \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b_1 \rfloor\lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b_1 \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b_2 \rfloor\lfloor b_1 \rfloor$	$\lfloor b_1 \rfloor\lfloor b_2 \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b_1 \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor\lfloor b_1 \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b_1 \rfloor\lfloor b_2 \rfloor$ $\lfloor b_2 \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b_1 \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b_2 \rfloor\lfloor b_1 \rfloor$
الكرات متطابقة	$\lfloor b,b \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b,b \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b,b \rfloor$ $\lfloor b \rfloor\lfloor b \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b \rfloor\lfloor b \rfloor$	$\lfloor b \rfloor\lfloor b \rfloor\lfloor\ \rfloor$ $\lfloor b \rfloor\lfloor\ \rfloor\lfloor b \rfloor$ $\lfloor\ \rfloor\lfloor b \rfloor\lfloor b \rfloor$

ليكن لدينا توزيع لِـ r كرة مختلفة $\{b_1,b_2,\dots,b_r\}$ على n من الصناديق المختلفة $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. نكوّن متتالية $x_1x_2\dots x_r$ طولها r من المجموعة $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ مستخدمين التوزيع المعطى كما يلي: x_i هو الصندوق الذي يحوي الكرة b_i لكل $1\le i\le r$.

وبالعكس، إذا كانت $x_1x_2\dots x_r$ متتالية طولها r من مجموعة الصناديق $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$، فإننا نكون توزيعاً للكرات المختلفة $\{b_1,b_2,\dots,b_r\}$ على الصناديق مستخدمين المتتالية المعطاة كما يلي: نضع الكرة b_i في الصندوق x_i لكل

$1 \le i \le r$. عليه، توزيعات r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة تقابل المتتاليات التي طولها r من مجموعة سعتها n.

وبالمثل يمكن توضيح أن توزيعات r كرة مختلفة $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة تقابل التباديل التي طولها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. عليه، ومن مبرهنة(١،١) تنتج المبرهنة التالية.

مبرهنة(١,٨)

(أ) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة يساوي n^r.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة يساوي $(n)_r$.

لتكن لدينا r كرة متطابقة موزعة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. لكل توزيع نأخذ عينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ الترتيب فيها غير مهم وسعتها r حيث $x_1, x_2, \ldots, x_r$ هي الصناديق التي تحوي الكرات. وبالعكس، كل عينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ سعتها r من المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ بحيث لا يكون فيها الترتيب مهماً تقابل توزيعاً لكرات متطابقة عددها r على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ كما يلي: نوزع الكرات بحيث يكون عدد الكرات في الصندوق a_i يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في العينة $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. عليه، يوجد تقابل بين توزيعات r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ والعينات من الطول r التي لا يكون فيها الترتيب مهماً والمأخوذة من مجموعة سعتها n.

لاحظ أنه إذا كان كل صندوق يحوي كرةً على الأكثر، فإن العينات في هذه الحالة تكون مجموعات. أما إذا لم يكن هناك شروط على عدد الكرات في الصناديق، فإن العينات في هذه الحالة تكون مجموعات مضاعفة. من ذلك ومن مبرهنة(١,٢) ومبرهنة(١,٣) نستنتج المبرهنة التالية.

مبرهنة(١,٩)

(أ) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة يساوي $\binom{n}{r}$.

نتيجة(١,١)

إذا كان $r \geq 0$ عدد صحيحاً، فإن عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$ يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

البرهان

لننظر إلى المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ كصناديق مختلفة، أي حل صحيح غير سالب للمعادلة يمكن رؤيته كتوزيع لـِ r كرة متطابقة على الصناديق المختلفة $X_1, X_2, \ldots, X_n$. والعكس بالعكس. من مبرهنة(٩،١)، عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$ يساوي $\binom{n-1+r}{r}$.

مثال(١,١٤)

كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 2$ ؟

الحل

من نتيجة(١,١)، عدد الحلول يساوي

$$\binom{3-1+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

مثال(١,١٥)

كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 30$ إذا كان $X_1 \geq 3$ و $X_2 \geq 5$ و $X_3 > 6$ ؟

الحل

حيث إن الحلول صحيحة، فإن $X_3 > 6$ تكافئ $X_3 \geq 7$. لنفرض $Y_1 = X_1 - 3$ و $Y_2 = X_2 - 5$ و $Y_3 = X_3 - 7$. لاحظ أن

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = X_1 - 3 + X_2 - 5 + X_3 - 7 = 30 - 15 = 15$$

ومنه عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 30$ إذا كان $X_1 \geq 3$ و $X_2 \geq 5$ و $X_3 > 6$ يساوي عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 15$. من نتيجة (١,١)، عدد الحلول يساوي

$$\binom{3-1+15}{15} = \binom{17}{15} = \binom{17}{2} = \frac{(17)(16)}{2} = 136\,.$$

(١,٦) تجزئات المجموعات

في هذا البند نجد عدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة منتهية عدد عناصرها n أو ما يسمى **بأعداد ستيرلنج من النوع الثاني**، ونوضح أن عدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة عدد عناصرها n يساوي عدد طرق توزيع n من الكرات المختلفة على k من الصناديق المتطابقة بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل.

لتكن A مجموعة غير خالية. نقول إن $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ تجزئة للمجموعة A إلى k جزءاً أو تجزئة عدد أجزائها k إذا تحقق ما يلي:

١- $\phi \neq A_i \subseteq A$ لكل $1 \leq i \leq k$.

٢- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$.

٣- $A_i \cap A_j = \phi$ إذا كان $1 \leq i \neq j \leq k$.

لتكن $X = \{b_1, b_2, b_3\}$ مجموعة مكونة من ثلاث كرات مختلفة. يمكن النظر إلى التجزئة $\{\{b_1, b_2\}, \{b_3\}\}$ على أنها توزيع للكرات b_1, b_2, b_3 على صندوقين متطابقين بحيث تكون b_1, b_2 في صندوق و b_3 في الصندوق الآخر.

وبوجه عام إذا كانت X مجموعة منتهية عدد عناصرها n فكل تجزئة عدد أجزائها k تقابل توزيعاً لكرات مختلفة عددها n على صناديق متطابقة عددها k بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل. كذلك أي توزيع لكرات مختلفة عددها n على صناديق متطابقة عددها k بحيث يحوي كل منها كرة واحدة على الأقل يقابل تجزئة عدد أجزائها k للمجموعة X .

يُرمز لعدد التجزئات التي عدد أجزائها k لمجموعة عدد عناصرها n بالرمز $S(n,k)$ وتسمى $S(n,k)$ أعداد ستيرلنج من النوع الثاني

Stirling numbers of the second kind.

لتكن $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. لاحظ أن $\{X\}$ هي التجزئة الوحيدة التي عدد أجزائها 1 للمجموعة X . ومنه $S(n,1)=1$. كذلك $\{\{x_1\},\{x_2\},\dots,\{x_n\}\}$ هي التجزئة الوحيدة التي عدد أجزائها n للمجموعة X . عليه $S(n,n)=1$.

مثال(١,١٦)

أوجد $S(4,2)$.

الحل

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$. التجزئات التي عدد أجزائها 2 للمجموعة X هي:

$\{\{a\},\{b,c,d\}\}$ ، $\{\{b\},\{a,c,d\}\}$ ، $\{\{c\},\{a,b,d\}\}$ ، $\{\{d\},\{a,b,c\}\}$ ، $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ ، $\{\{a,c\},\{b,d\}\}$ ، $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$. عليه $S(4,2)=7$.

مثال(١,١٧)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$.

الحل

لتكن P تجزئة عدد أجزائها $n-1$ لمجموعة X عدد عناصرها n . لاحظ انه يوجد جزء واحد فقط من هذه الأجزاء مكون من عنصرين وكل من الأجزاء الأخرى مكون من عنصر واحد فقط. أي أن كل تجزئة تتحدد تماماً بتعيين الجزء المكون من

عنصرين. ومنه، عدد التجزئات التي عدد أجزائها $n-1$ للمجموعة X يساوي عدد المجموعات الجزئية من X والمكونة من عنصرين. أي يساوي $\binom{n}{2}$.

مثال(١,١٨)

أوجد $S(4,3)$.

الحل

من مثال(١,١٦) نجد $S(4,3)=\binom{4}{2}=6$.

بما أن الأجزاء في التجزئة يجب أن تكون منفصلة زوجاً زوجاً وغير خالية فإن $S(n,k)=0$ لأي عددين صحيحين موجبين $k>n$. نُعِّرف $S(0,0)=1$ و $S(n,0)=0$ لكل عدد صحيح موجب n ونستفيد من ذلك في حساب أعداد ستيرلنج من النوع الثاني باستخدام المبرهنة التالية.

مبرهنة(١,١٠)

لكل عددين صحيحين موجبين n,k فإن

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$$

البرهان

لتكن $N=\{1,2,\ldots,n\}$ و $N'=\{1,2,\ldots,n,n+1\}$. أي تجزئة للمجموعة N' إلى k جزءاً يمكن الحصول عليها بطريقة وحيدة من التالي:

١- تجزئة للمجموعة N إلى $k-1$ جزءاً، ثم إضافة المجموعة $\{n+1\}$ إلى تلك التجزئة. عدد التجزئات في هذه الحالة هو $S(n,k-1)$.

٢- تجزئة للمجموعة N إلى k جزءاً، ثم تعيين جزء من أجزاء التجزئة (عددها k) ومن ثم إضافة العنصر $n+1$ إليه. حسب مبدأ حاصل الضرب، عدد التجزئات في هذه الحالة هو $kS(n,k)$. من مبدأ المجموع، فإن $S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$.

مثال(١,١٩)

مستخدماً مبرهنة(١,١٠) أوجد $S(5,3)$.

الحل

$$S(5,3)=S(4,2)+3S(4,3)=7+3\cdot 6=25$$

يوضح الجدول التالي طريقة لإيجاد أعداد ستيرلنج من النوع الثاني باستخدام مبرهنة(١,١٠).

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7
n=1	1	0	0	0	0	0	0
n=2	1	1	0	0	0	0	0
n=3	1	3	1	0	0	0	0
n=4	1	7	6	1	0	0	0
n=5	1	15	25	10	1	0	0
n=6	1	31	90	65	15	1	0
n=7	1	63	301	350	140	21	1

مبرهنة(١,١١)

عدد الدوال الشاملة من مجموعة عدد عناصرها m إلى مجموعة عدد عناصرها n، حيث $m \geq n$، يساوي $n!S(m,n)$.

البرهان

لتكن $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ و $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ ولتكن $f:X\to Y$ دالة شاملة. لكل $1\le i\le n$ نعرف المجموعة $f^{-1}(y_i)=\{x\in X: f(x)=y_i\}$. من الواضح أن $f^{-1}(y_i)\subseteq X$ وأن $f^{-1}(y_i)\bigcap f^{-1}(y_k)=\phi$ إذا كان $i\neq k$. كذلك $f^{-1}(y_i)\neq\phi$ لأن الدالة شاملة. إذن $\{f^{-1}(y_i):1\le i\le n\}$ تجزئة عدد أجزائها n للمجموعة X. بالمقابل يمكننا الحصول على $n!$ دالة شاملة لأي تجزئة عدد أجزائها n للمجموعة X. وحيث إن عدد التجزئات التي عدد أجزائها n للمجموعة X هو $S(m,n)$، فينتج من مبدأ حاصل الضرب أن عدد الدوال الشاملة هو $n!S(m,n)$. □

ويمكن الحصول على أعداد ستيرلنج من المبرهنة التالية التي سنثبتها باستخدام مبرهنة(١,١١)، وذلك بعد حساب عدد الدوال الشاملة بطريقة أخرى في مبرهنة(٢،٢) في الفصل الثاني.

مبرهنة(١,١٢)

إذا كان $m\ge n$ عددين صحيحين موجبين، فإن

$$S(m,n)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m \quad \square$$

لنرمز لعدد التجزئات لمجموعة سعتها n بالرمز B_n (من المعلوم أنه يوجد تقابل بين مجموعة التجزئات لمجموعة وعلاقات التكافؤ التي يمكن تعريفها عليها).
من الواضح أن $B_n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)$. تسمى هذه الأعداد **بأعداد بل** (Bell numbers). فمثلاً $B_4=15$. يمكن الحصول على B_n من جدول أعداد ستيرلنج بجمع عناصر الصف رقم n.

(١,٧) تجزئات الأعداد الصحيحة

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. نقول إن المتتالية غير المتزايدة من الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ تجزئة لـِ n إذا كان $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ ولكل $1 \le i \le n$ نسمي n_i جزءاً . فمثلاً 3,3,2,1 تجزئة للعدد 9. نرمز لعدد تجزئات العدد n بالرمز $p(n)$. كما نرمز لعدد تجزئات العدد n إلى k جزءاً بالرمز $p_k(n)$.

مثال(١,٢٠)

تجزئات العدد 5 هي :

1,1,1,1,1

2,1,1,1

2,2,1

3,1,1

3,2

4,1

5

عليه $p(5) = 7$ كما أن

$$p_1(5) = 1 \quad , \quad p_2(5) = 2 \quad , \quad p_3(5) = 2 \, , \quad p_4(5) = 1 , \quad p_5(5) = 1 .$$

من الواضح أن: $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$

لاحظ أنه من الممكن رؤية التجزئة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ للعدد الصحيح الموجب n كتوزيع لـِ n كرة متطابقة على k من الصناديق المتطابقة بحيث تحوي الصناديق $n_1, n_2, \ldots, n_k$ من الكرات. وكذلك يمكن رؤية توزيع n كرة متطابقة على k من

الصناديق المتطابقة بحيث لا يوجد صندوق خالٍ كتجزئة للعدد n. عليه، يوجد تقابل بين تجزئات n وتوزيعات n كرة متطابقة على صناديق متطابقة بحيث لا يوجد صندوق خالٍ.

من الممكن بسهولة التحقق من أن:

$$p(1)=1,\ p(2)=2,\ p(3)=3,\ p(4)=5,\ p(5)=7,\ p(6)=11,\ p(7)=15$$

كذلك يمكن ملاحظة أن: $p_n(n)=p_1(n)=p_{n-1}(n)=1$.

مبرهنة(١,١٣)

لأي عددين صحيحين موجبين n,k، فإن:

$$p_k(n+k)=p_1(n)+p_2(n)+\cdots+p_k(n)=\sum_{i=1}^{k}p_i(n)$$

البرهان

الطرف الأيمن هو عدد تجزئات العدد n التي عدد أجزائها أصغر من أو يساوي k. لتكن $a_1,a_2,\ldots,a_i$ تجزئة للعدد n إلى i جزءاً حيث $i\le k$. من هذه التجزئة نكون تجزئة للعدد $n+k$ إلى k جزءاً كما يلي: نضيف 1 إلى كل a_i، ثم نضيف متتالية كل حد فيها 1 وطولها $k-i$ فنحصل على

$$a_1+1,a_2+1,\ldots,a_i+1,1,1,\ldots,1$$

حيث

$$(a_1+1)+(a_2+1)+\ldots+(a_i+1)+(k-i)=a_1+a_2+\cdots+a_i+k=n+k$$

بالمقابل، من أي تجزئة للعدد $n+k$ إلى k جزءاً نكون تجزئة للعدد n عدد أجزائها أصغر من أو يساوي k وذلك بحذف كل الأجزاء التي تساوي 1 ثم طرح 1 من الأجزاء الأخرى. وبالتالي فإن $p_k(n+k)=\sum_{i=1}^{k}p_i(n)$.

نتيجة(١,٢)

$$p_k(m)=\sum_{i=1}^{k} p_i(m-k)$$

البرهان

ضع $n=m-k$ في مبرهنة(١,١٣). □

يعطي الجدول التالي قيم $p_k(n)$ عندما $1\le k,n\le 10$ وقد أُنشئ استناداً إلى نتيجة(١,٢) وإلى أن $p_k(n)=0$ عندما $k>n$.

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
n=1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
n=3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
n=4	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0
n=5	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0
n=6	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0
n=7	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0
n=8	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0
n=9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0
n=10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

للتجزئة $n_1,n_2,\ldots,n_k$ للعدد الصحيح الموجب n نكون ***شكل فيريرز*** (Ferrers diagram) برسم n_i نقطة في الصف رقم i لكل $1\le i\le k$. فمثلاً شكل فيريرز للتجزئة 3,2,1,1 للعدد 7 يكون:

● ● ●
● ●
●
●

كذلك شكل فيريرز للتجزئة 4,2,1 للعدد 7 يكون:

● ● ● ●
● ●
●

لكل شكل فيريرز لتجزئة للعدد n يمكننا الحصول على منقول (transpose) وذلك بتحويل الصفوف إلى أعمدة. لاحظ أن ما سنحصل عليه هو شكل فيريرز لتجزئة للعدد n نفسه.

مثال(١,٢١)

تجزئات العدد 4 إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي 3 هي:

3,1

2,2

2,1,1

1,1,1,1

كما أن التجزئات المقابلة لمنقول شكل فيريرز للتجزئات المبينة أعلاه هي على الترتيب:

2,1,1

2,2

3,1

4

نلاحظ أن عدد تجزئات العدد 4 إلى أجزاء كل منها على الأكثر 3 يساوي عدد التجزئات للعدد 4 إلى ثلاثة أجزاء أو أقل. في الحقيقة، يمكن تعميم ذلك كما في المبرهنة التالية:

مبرهنة(١,١٤)

عدد التجزئات للعدد الصحيح الموجب n إلى أجزاء كل منها على الأكثر k يساوي عدد التجزئات للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر.

البرهان

لاحظ أن منقول شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي k يعطي شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر. وهذا صحيح لأن أكبر عدد من النقاط في صف في الشكل الأول هو k على الأكثر وعليه فإن عدد الصفوف في المنقول هو k على الأكثر. وبالعكس منقول شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى k جزءاً على الأكثر هو شكل فيريرز لتجزئة للعدد n إلى أجزاء كل منها أصغر من أو يساوي k.

تمارين(١,٣)

١- اكتب عبارة مكافئة (على شكل عدد الحلول الصحيحة لمعادلة) لما يلي:

(أ) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة.

(ب) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث يحوي كل صندوق كرتين على الأكثر.

(ج) عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من المجموعة $\{A, B, C, D, E\}$.

(د) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث يحوي كل صندوق كرتين على الأقل.

٢- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كان $X_k \geq 0$ لكل $1 \leq k \leq 5$؟

٣- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كانت $X_k \geq -3$ ؟

٤- كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$ إذا كانت $X_k \geq 2k$ ؟

٥- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq 0$ ؟

٦- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq -2$ ؟

٧- كم عدد الحلول الصحيحة للمتباينة $X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$ إذا كانت $X_k \geq 2k$ ؟

٨- كم عدد الحلول الصحيحة الآنية للمعادلتين $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$ و $X_1 + X_2 + X_3 = 5$ إذا كانت $X_k \geq 0$ ؟

٩- إذا كان $n \geq 2$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

١٠- إذا كان $n \geq 3$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن $S(n,3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$.

١١- إذا كان $n \geq 4$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}.$$

١٢- إذا كان $n \geq 6$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن

$$S(n, n-3) = \binom{n}{4} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{2} + \frac{1}{6}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}.$$

١٣- لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $Y=\{f,g,h,i\}$. ما عدد الدوال الشاملة من X إلى Y ؟

١٤- أكتب كل التجزئات للأعداد $3,4,6,7$.

١٥- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $P_2(n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

١٦- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $p_n(2n)=p(n)$.

١٧- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $p_n(2n+1)=p(n+1)-1$.

١٨- إذا كان $n\geq 4$ عدداً صحيحاً، فأثبت أن $p_{n-2}(n)=2$.

الفصل الثاني

مبدأ التضمين والإقصاء

THE INCLUSION-EXCLUSION PRINCIPLE

يعتبر مبدأ المجموع للعدّ أبسط مبادئ العد الأساسية، ويفيدنا بأنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات منتهية منفصلة زوجاً زوجاً، فإن $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. ومبدأ التضمين والإقصاء – في أبسط صوره – يعطينا صيغة لحساب $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ عندما نسمح للمجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أن تكون متشابكة.

فيما يلي سنفرض أن U مجموعة شاملة منتهية معطاة وأن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من U، ولكل $i = 1,2,\ldots,n$ نضع $\alpha_i = \sum \left| \bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k} \right|$ حيث يؤُخذ المجموع على جميع المجموعات الجزئية المكنة $\{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$.

مبرهنة(٢,١) (مبدأ التضمين والإقصاء)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$$

البرهان

ليكن $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. عند حساب $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ فإن x يُعدّ مرة واحدة، ويختلف الأمر عند حساب كل من $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. سنثبت أن إسهام x في حساب العدد $\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ يساوي 1. نفرض أن x ينتمي فقط إلى المجموعات $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$. إذن إسهام x في حساب العدد $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ يساوي m. كذلك، إن إسهام x في حساب العدد $\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$ يساوي $\binom{m}{2}$، لأن إسهام x في حساب $|A_i \cap A_j|$ يساوي 0 في حالة $\{i, j\} \not\subset \{j_1, \ldots, j_m\}$ ويساوي 1 في حالة $\{i, j\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_m\}$. وبالمثل فإن إسهام x في حساب العدد α_i يساوي $\binom{m}{i}$ لكل $1 \le i \le n$. إذن، إن إسهام x في حساب العدد $\alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ يساوي $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$، لأن $\binom{m}{i} = 0$ لكل $m < i \le n$. ولكن باستخدام مبرهنة ذات الحدين نعلم أن $1 = \binom{m}{0} = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$ وهذا يتم البرهان. □

في كثير من المسائل، نحسب عدد العناصر التي لا تنتمي إلى أي من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_m$ مستخدمين النتيجة التالية لمبدأ التضمين والإقصاء.

نتيجة(٢,١)

إذا كانت U مجموعة شاملة منتهية وكانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من U، فإن $|U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n$.

والآن نستند إلى مبدأ التضمين والإقصاء ونتيجته ونقدم مجموعة من المبرهنات والأمثلة المتنوعة.

مبرهنة(٢,٢)

عدد التطبيقات الشاملة من المجموعة $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ إلى المجموعة $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$، حيث $m\geq n$ ، يساوي

$$n^m-\binom{n}{1}(n-1)^m+\binom{n}{2}(n-2)^m-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

البرهان

لتكن U هي مجموعة التطبيقات من A إلى B. ضع $A_k=\{f\in U: b_k\notin R(f)\}$ لكل $1\leq k\leq n$، حيث $R(f)$ ترمز إلى مدى f. إذن، المطلوب حساب العدد $|U-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|$. واضح أن $|U|=n^m$. الآن نحسب α_1 من العلاقة $\alpha_1=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$. من تعريف A_k ينتج أن $|A_k|$ يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B\setminus\{b_k\}$، وبالتالي فإن $|A_k|=(n-1)^m$ لكل $1\leq k\leq n$. إذن $\alpha_1=n(n-1)^m$. لحساب $\alpha_2=|A_1\cap A_2|+\cdots+|A_1\cap A_n|+|A_2\cap A_3|+\cdots+|A_{n-1}\cap A_n|$ نلاحظ أن $|A_i\cap A_j|$، حيث $1\leq i<j\leq n$، يساوي عدد التطبيقات من A إلى $B\setminus\{b_i,b_j\}$؛ وبالتالي فإن $|A_i\cap A_j|=(n-2)^m$. إذن، $\alpha_2=\binom{n}{2}(n-2)^m$ وبالمثل نجد أن $\alpha_k=\binom{n}{k}(n-k)^m$ لكل $1\leq k\leq n$. إذن،

$$|U-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|=|U|-\alpha_1+\alpha_2-\cdots+(-1)^n\alpha_n$$

$$= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m. \ \square$$

إذا كان $f:\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ تبديلاً، فإننا نقول إنه **تبديل تام** (derangement) إذا تحقق الشرط التالي: $f(i) \neq i$ لكل $1 \leq i \leq n$. نرمز لزمرة تناظر المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ بالرمز S_n ولعدد تباديلها التامة بالرمز d_n.

مبرهنة(٢,٣)

إن عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ يساوي

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

البرهان

ضع $U = S_n$، ولكل $1 \leq k \leq n$ ضع $A_k = \{f \in S_n : f(k) = k\}$. إذن المطلوب حساب العدد $|U - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$. نعلم أن $|U| = |S_n| = n!$.

الآن نحسب α_1 من العلاقة $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. من تعريف A_k ينتج أن $|A_k|$ يساوي عدد تباديل المجموعة $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}$، وبالتالي فإن $|A_k| = (n-1)!$ لكل $1 \leq k \leq n$. إذن $\alpha_1 = n((n-1)!) = \frac{n!}{1!}$. لحساب $\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|$ نلاحظ أن $|A_i \cap A_j|$، حيث $1 \leq i < j \leq n$، يساوي عدد تباديل المجموعة $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i, j\}$، وبالتالي فإن $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. إذن

$\alpha_2 = \binom{n}{2}\left((n-2)!\right) = \frac{n!}{2!}$. وبالمثل نجد أن $\alpha_k = \binom{n}{k}((n-k)!) = \frac{n!}{k!}$ لكل $1 \le k \le n$. إذن

$$|U-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = |U| - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n$$
$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \ \square$$

نلاحظ أن $\frac{d_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \approx e^{-1} \approx 0.368$ من أجل قيم n الكبيرة. أي، إن عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ يساوي $\frac{1}{3}$ عدد تباديلها تقريباً.

مثال(٢,١)

نقول إن التبديل $f \in S_n$ خالٍ من التعاقب إذا حقق الشرط التالي: $f(j+1) \neq f(j)+1$ لكل $1 \le j < n$. نريد حساب عدد التباديل الخالية من التعاقب، والذي نرمز له بالرمز q_n. لأجل ذلك ضع $U = S_n$، ولكل $1 \le k < n$ لتكن A_k هي مجموعة التباديل $f \in S_n$ التي تحقق $f(j) = k, f(j+1) = k+1$ لإحدى قيم $1 \le j < n$.

إذن المطلوب حساب العدد $q_n = |U-(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})|$.

وابتغاءً للسهولة، نستخدم الآن لغة الأنساق للحديث عن التباديل. نلاحظ أن تبديلاً ما ينتمي إلى المجموعة A_1 إذا وفقط إذا كان يحتوي على النسق 12. وبالتالي فإنه يوجد تقابل من A_1 إلى مجموعة تباديل مجموعة الرموز $\{12,3,4,\ldots,n\}$. إذن $|A_1| = (n-1)!$. بالمثل نجد أن $|A_k| = (n-1)!$ لكل $1 \le k < n$. وهكذا فإن $\alpha_1 = (n-1)((n-1)!)$. الآن، نحسب

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1}|$. نلاحظ أنه إذا كان $f \in A_1 \cap A_2$ فإن f يحتوي على النسقين 23 و 12، أما إذا كان $f \in A_1 \cap A_3$ فإن f يحتوي على النسقين 34 و 12. في الحالة الأولى يحتوي النسقان 23 و 12 على العنصر المشترك 2، وبالتالي فإن كل $f \in A_1 \cap A_2$ يحتوي على النسق 123. إذن $|A_1 \cap A_2|$ يساوي عدد تباديل المجموعة $\{123,4,5,\ldots,n\}$. أي، $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$. وفي الحالة الثانية لا يحتوي النسقان 34 و 12 على أي عنصر مشترك. إذن $|A_1 \cap A_3|$ يساوي عدد تباديل المجموعة $\{12,34,5,6,\ldots,n\}$. أي، $|A_1 \cap A_3| = (n-2)!$. وبالمثل نجد أن $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ لكل $1 \le i < j < n-1$. وبالتالي فإن $\alpha_2 = \binom{n-1}{2}((n-2)!)$.

وبشكل عام نجد أن $\alpha_k = \binom{n-1}{k}((n-k)!)$ لكل $1 \le k \le n-1$. إذن

$$q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

ولكن

$$\binom{n-1}{k}(n-k)! = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\cdot(n-k)! = (n-1)!\frac{n-k}{k!}$$

إذن

$$q_n = n! - (n-1)!\,\frac{n-1}{1!} + (n-1)!\,\frac{n-2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= (n-1)!\left[n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \frac{n-3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]$$

$$= (n-1)!\left[n - \frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} - \frac{n}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!} + (-1)^n\frac{n}{n!}\right] +$$

$$(n-1)!\left[\frac{1}{1!}-\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n-1}{(n-1)!}-(-1)^{n}\frac{n}{n!}\right]$$

$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}\right]+(n-1)!\left[1-\frac{1}{1!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]=d_n+d_{n-1}$$

ونلاحظ أن

$$\frac{q_n}{n!}=\frac{d_n}{n!}+\frac{d_{n-1}}{n!}=\frac{d_n}{n!}+\frac{1}{n}\cdot\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\approx\frac{1}{e}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{e}=\frac{n+1}{en}$$

مثال(٢,٢)

جد عدد الأعداد الصحيحة x بحيث $1 \le x \le 500$، 5 لا يقسم x، 6 لا يقسم x، 8 لا يقسم x.

الحل

ضع $U=\{1,2,\ldots,500\}$ وضع $A_1=\{x\in U:5|x\}$ و $A_2=\{x\in U:6|x\}$ و $A_3=\{x\in U:8|x\}$ فيكون المطلوب حساب العدد $|U-(A_1\bigcup A_2\bigcup A_3)|$.

نلاحظ أن $100=\left\lfloor\frac{500}{5}\right\rfloor=|A_1|$، $83=\left\lfloor\frac{500}{6}\right\rfloor=|A_2|$، $62=\left\lfloor\frac{500}{8}\right\rfloor=|A_3|$.

وكما هو معلوم فإن $a\,|\,n$ و $b\,|\,n$ إذا وفقط إذا كان $lcm(a,b)\,|\,n$؛ لذلك نجد أن $16=\left\lfloor\frac{500}{30}\right\rfloor=|A_1\bigcap A_2|$، $12=\left\lfloor\frac{500}{40}\right\rfloor=|A_1\bigcap A_3|$، $20=\left\lfloor\frac{500}{24}\right\rfloor=|A_2\bigcap A_3|$، $4=\left\lfloor\frac{500}{120}\right\rfloor=|A_1\bigcap A_2\bigcap A_3|$. وبالتالي فإن

$$|U-(A_1\cup A_2\cup A_3)|=|U|-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$

$$=500-(100+83+62)+(16+12+20)-4=299$$

مثال(٢,٣)

احسب $\varphi(40)$. أي، احسب قيمة دالة أويلر φ عند العدد 40.

الحل

نلاحـــظ أن $40 = (2^3)(5)$ ونـــضع $U = \{1,2,\ldots,40\}$ ، $A_1 = \{x \in U{:}2|x\}$ و $A_2 = \{x \in U{:}5|x\}$. إذن

$$\varphi(40) = |U| - \left(|A_1| + |A_2|\right) + |A_1 \cap A_2| = 40 - \left(\left\lfloor \frac{40}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{40}{5} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{40}{10} \right\rfloor$$

$$= 40 - (20 + 8) + 4 = 16$$

وهكذا يمكن حساب $\varphi(n)$ عندما نعلم تحليل n إلى عوامله الأولية.

مثال(٢,٤)

جـــد عـــدد الحلـــول الـصحيحة للمعادلـــة $X_1 + X_2 + X_3 = 13$ بحيـــث $0 \le X_1 \le 6$ ، $0 \le X_2 \le 9$ ، $0 \le X_3 \le 3$.

الحل

نفرض أن U مجموعـة الحلـول الـصحيحة بحيـث $X_i \ge 0$ لكـل $1 \le i \le 3$ ، وأن A_1 مجموعة الحلول الـصحيحة بحيـث $X_1 \ge 7$ ، $X_2 \ge 0$ ، $X_3 \ge 0$ ، وأن A_2 مجموعـــة الحلـــول بحيـــث $X_1 \ge 0$ ، $X_2 \ge 10$ ، $X_3 \ge 0$ ، وأن A_3 مجموعـــة الحلـــول بحيـــث $X_1 \ge 0$ ، $X_2 \ge 0$ ، $X_3 \ge 4$. إذن المطلـــوب حـــساب العـــدد $\left|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\right|$.

واضح أن $|U| = \binom{3-1+13}{13} = 105$. وبالمثل نجد أن

$$|A_1| = \binom{3-1+13-7}{13-7} = 28 \text{ ، } |A_2| = \binom{3-1+13-10}{13-10} = 10 \text{ ، }$$

$$|A_3| = \binom{3-1+13-4}{13-4} = 55 \text{ ،} \quad |A_1 \cap A_2| = 0 \text{ ،}$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3-1+13-7-4}{13-7-4} = 6 \text{ ،} \quad |A_2 \cap A_3| = 0 \text{ ،} \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

وبالتالي فإن

$$|U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 105 - (28+10+55) + (0+6+0) - 0 = 18 \quad \square$$

ينتج من تعريف اتحاد المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أن مبدأ التضمين والإقصاء يُعيّن عدد العناصر التي تنتمي على الأقل إلى واحدة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. وللحصول على تعميمين بسيطين لهذا المبدأ، نرمز لعدد العناصر التي تنتمي بالضبط إلى m مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بالرمز e_m، كما نستخدم الرمز l_m للدلالة على عدد العناصر التي تنتمي على الأقل إلى m مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. المبرهنة التالية تعطينا التعميمين المطلوبين.

مبرهنة(٢,٤)

(أ) $$e_m = \alpha_m - \binom{m+1}{m}\alpha_{m+1} + \binom{m+2}{m}\alpha_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha_n$$

(ب) $$l_m = \alpha_m - \binom{m}{m-1}\alpha_{m+1} + \binom{m+1}{m-1}\alpha_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}\alpha_n$$

البرهان

(أ) ليكن $x \in U$ ، حيث U المجموعة الشاملة. نفرض أن x ينتمي بالضبط إلى r مجموعة من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$. إذا كان $r < m$ فإن إسهام x في حساب كل من الأعداد $e_m, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ يساوي 0 وبالتالي فإن إسهام x في

حساب كل من طرفي المعادلة يساوي 0. وإذا كان $r = m$ فإن إسهام x في حساب كل من العددين e_m, α_m يساوي 1 وإن إسهام x في حساب كل من $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n$ يساوي 0؛ وبالتالي فإن إسهام x في حساب كل من طرفي المعادلة يساوي 1. أخيراً، نفرض أن $m < r \le n$. نلاحظ أن إسهام x في حساب e_m يساوي 0؛ كما أن إسهام x في حساب الأعداد $\alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_n$ يساوي $\binom{r}{m}, \binom{r}{m+1}, \ldots, \binom{r}{r}, 0, \ldots, 0$ على الترتيب. إذن يجب إثبات أن إسهام x في حساب الطرف الأيمن للمعادلة يساوي 0. أي يجب إثبات أن

$$\binom{r}{m} - \binom{m+1}{m}\binom{r}{m+1} + \binom{m+2}{m}\binom{r}{m+2} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r}{r} = 0$$

باستخدام العلاقة $\binom{r}{k}\binom{k}{t} = \binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}$ نجد أن

$$\binom{r}{m} - \binom{m+1}{m}\binom{r}{m+1} + \binom{m+2}{m}\binom{r}{m+2} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r}{r} =$$

$$= \binom{r}{m} - \binom{r}{m}\binom{r-m}{1} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r-m}{r-m}$$

$$= \binom{r}{m}\left[1 - \binom{r-m}{1} + \cdots + (-1)^{r-m}\binom{r-m}{r-m}\right] = \binom{r}{m}(1 + (-1))^{r-m} = 0$$

(ب) نلاحظ أولاً أن $l_m = e_m + l_{m+1}$ ، $l_n = e_n$ وبالتالي فإن $l_m = e_m + e_{m+1} + e_{m+2} + \cdots + e_n$. من ناحية أخرى، من تمرين ١٦ في تمارين (١,٢) نجد العلاقة

$$\binom{r}{k} - \binom{r}{k+1} + \binom{r}{k+2} - \binom{r}{k+3} + \cdots + (-1)^{r-k}\binom{r}{r} = \binom{r-1}{k-1}$$

التي تبسط لنا صيغة $l_m = e_m + e_{m+1} + e_{m+2} + \cdots + e_n$ الناتجة من (أ) إلى الشكل

$$l_m = \alpha_m - \binom{m}{m-1}\alpha_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}\alpha_n$$

مثال(٢,٥)

نقول إن التبديل $f \in S_n$ يثبت العنصر $x \in \{1,2,\ldots,n\}$ عندما يكون $f(x)=x$. نستخدم الرمز $d_{n,m}$ للدلالة على عدد التباديل $f \in S_n$ التي تثبت بالضبط m عنصراً من العناصر $1,2,\ldots,n$. واضح أن $d_{n,m} = \binom{n}{m} d_{n-m}$ ؛ لأنه إذا كان f يثبت بالضبط m عنصراً فلا بد أن يصاحبه تبديل تام لِ $n-m$ عنصراً. نريد حساب $d_{n,m}$. باستخدام (أ) من مبرهنة(٢,٣) والنقاش المتضمن في مثال (٢,١) نجد أن

$$\begin{aligned}
d_{n,m} &= e_m = \alpha_m - \binom{m+1}{m}\alpha_{m+1} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m}\alpha_n \\
&= \binom{n}{m}(n-m)! - \binom{m+1}{m}\binom{n}{m+1}(n-m-1)! + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m} \\
&= \binom{n}{m}\left[(n-m)! - \binom{n-m}{1}(n-m-1)! + \cdots + (-1)^{n-m}\right] = \binom{n}{m} d_{n-m}
\end{aligned}$$

مثال(٢,٦)

أثبت بطريقة تركيبية أن $n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} 2^{n-k}$.

الحل

نفرض أن $U = \{x_1x_2\ldots x_n : x_i \in \{0,1\} \ \forall\ i = 1,2,\ldots,n\}$ ولكل $i = 1,2,\ldots,n$ نفرض أن $A_i = \{x_1x_2\ldots x_n \in U \ : x_i = 0\}$. نحسب عدد المتتاليات التي تحتوي بالضبط على 0 واحد. أولاً، لكل $i = 1,2,\ldots,n$ توجد متتالية واحدة بحيث يكون

0 حدها رقم i بينما تكون حدودها الأخرى 1. إذن عدد المتتاليات المطلوبة يساوي n. ثانياً، حسب (أ) من مبرهنة(٣،٢) فإن عدد هذه المتتاليات يساوي

$$e_1 = \alpha_1 - \binom{2}{1}\alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\alpha_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$$

إذن
$$n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}2^{n-k}$$

ونلاحظ أنه يمكن الحصول على العلاقة السابقة بطريقة غير تركيبية كما يلي:

من مبرهنة ذات الحدين نجد أن

$$(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 2^{n-k}$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نجد أن

$$n(x+2)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}2^{n-k}$$

وعندما يكون $x = -1$ نحصل على

$$n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(-1)^{k-1}2^{n-k}.$$

تمارين

١- أظهر استعراض لتسجيل 100 من الطلاب أن 32 طالباً مسجلون في المقرر أ، 44 طالباً مسجلون في المقرر ب، 47 طالباً مسجلون في المقرر ج، 11 طالباً مسجلون في المقررين ب و ج، 12 طالباً مسجلون في المقررين أ و ج، 12 طالباً

مسجلون في المقررين أ و ب، و أن 3 طلاب مسجلون في المقررات الثلاثة. جد عدد الطلاب غير المسجلين في أي من المقررات الثلاثة.

٢- أجريت اختبارات على 200 عينة من المياه الجوفية بهدف البحث عن وجود الأملاح أ، ب، ج فيها. فوجد أن 14 عينة تحتوي على الملح أ، 10 عينات تحتوي على الملح ب، 8 عينات تحتوي على الملح ج، 6 عينات تحتوي على الملحين أ و ب، 6 عينات تحتوي على الملحين ب و ج، 4 عينات تحتوي على الملحين أ و ج، وعينتان تحتويان على الملحين أ و ب ولا تحتويان على الملح ج. جد عدد العينات التي تحتوي على الأقل على واحد من الأملاح الثلاثة.

٣- (أ) جد عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تترك كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي وتجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

(ب) ما هو عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تترك بالضبط 4 أعداد في أماكنها الطبيعية؟

(ج) جد عدد تباديل $1,2,\ldots,11$ التي تجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

٤- جد عدد تباديل $1,2,\ldots,n$ التي تترك كل عدد زوجي في موضعه الطبيعي وتجعل كل عدد فردي في غير موضعه الطبيعي.

٥- جد عدد تباديل $1,2,\ldots,n$ التي تترك بالضبط k عدداً في أماكنها الطبيعية.

٦- جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 20$ بحيث يكون

(أ) $0 \le X_i \le 10$ لكل $i = 1,2,\ldots,5$.

(ب) $0 \le X_i \le 8$ لكل $i = 1,2,\ldots,5$.

٧- جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 30$ بحيث يكون

(أ) $0 \le X_i \le 8$ لكل $i = 1,2,3,4$.

(ب) $-10 \le X_i \le 20$ لكل $i = 1,2,3,4$.

(ج) $0 \le X_4 \le 18$ ، $0 \le X_3 \le 15$ ، $0 \le X_2 \le 9$ ، $0 \le X_1 \le 6$.

٨- جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 = 30$ بحيث يكون $5 \le X_1 < 11$ ، $6 < X_2 \le 14$ ، $10 \le X_3 \le 24$.

٩- إذا كانت $A = \{1,2,\ldots,999999\}$ ، فما هو عدد الأعداد التي تنتمي إلى A والتي مجموع أرقام كل منها يساوي 15؟

١٠- جد عدد المجموعات المضاعفة من السعة 15 المأخوذة من المجموعة $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ بحيث يكون تكرار a_1 أصغر من 5 ، تكرار a_2 أصغر من 7 ، تكرار a_3 أصغر من 6.

١١- جد عدد الأعداد الصحيحة n ، $1 \le n \le 2000$ ، بحيث

(أ) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n$. (ب) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n, 7 \nmid n$. (ج) $2 \nmid n, 3 \nmid n, 5 \nmid n, 7 | n$.

١٢- جد عدد تباديل الحروف $a, b, c, \ldots, x, y, z$ التي لا تحتوي على أي من الأنساق path, train, time.

١٣- جد عدد تباديل حروف الكلمة equation التي لا تثبت أي حرف من حروف العلّة a, e, i, o, u.

١٤- (أ) احسب d_3, d_4, d_5.

(ب) إذا كان 11660 يساوي عدد التباديل التامة للأعداد $1,2,\ldots,n$ التي تظهر فيها الأعداد $1,2,3,4,5$ في المواضع الخمسة الأولى من التبديل التام، فجد n.

١٥- إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ حيث p_1 و p_2 عددان أوليان مختلفان، فأثبت أن $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)$ ثم احسب $\varphi(135)$.

١٦- استخدم مبدأ التضمين والإقصاء لحساب عدد الأعداد الأولية التي هي أقل من 45. [إرشاد: إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً مؤلفاً فإن له قاسماً أولياً أصغر من أو يساوي $\sqrt{n}$.]

١٧- استخدم مبدأ التضمين والإقصاء لحساب عدد الأعداد الأولية التي هي أقل من 120.

١٨- إذا رميت 8 أحجار نرد مختلفة فجد احتمال أن تظهر جميع الأعداد $1,2,3,4,5,6$.

١٩- جد عدد ترتيبات الحروف a,a,a,b,b,b,c,c,c بحيث

(أ) لا تكون أي 3 حروف متعاقبة من النوع نفسه.

(ب) لا يكون أي حرفين متعاقبين من النوع نفسه.

٢٠- جد عدد ترتيبات الحروف a,a,a,b,b,b,b,c,c بحيث لا تكون الحروف من النوع نفسه متعاقبه.

٢١- جد عدد ترتيبات الحروف a,a,b,b,c,c,d,d,d بحيث لا يكون أي حرفين متعاقبين من النوع نفسه.

٢٢- جد عدد ترتيبات حروف الكلمة INTELLIGENT بحيث

(أ) يوجد زوج واحد على الأقل من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

(ب) يوجد زوجان على الأقل من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

(ج) يوجد زوجان بالضبط من الحروف المتعاقبة من النوع نفسه.

٢٣- جد عدد طرق توزيع r كرةً مختلفة على n صندوقاً مختلفاً، $r \geq n$ ، بحيث لا يكون أي من الصناديق خالياً.

٢٤- استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات مبدأ التضمين والإقصاء.

٢٥- استخدم نوعاً من الاستقراء الرياضي الخلفي لإثبات العلاقة المعطاة في (ب) من مبرهنة(٢,٣)، كما يلي:

(أ) لاحظ أن $l_n = e_n = \alpha_n$

(ب) لاحظ أن $l_{n-1} = e_{n-1} + l_n$

(ج) أثبت أن $l_{n-1} = \alpha_{n-1} - \binom{n-1}{n-2}\alpha_n$

(د) لكل $1 \leq r \leq n-1$ ، لاحظ أن $l_{r-1} = e_{r-1} + l_r$

(هـ) استخدم الاستقراء الرياضي الخلفي لإثبات المطلوب.

الفصل الثالث

الـدوال المـولّـدة

GENERATING FUNCTIONS

يبرز هذا الفصل ترابط فروع علم الرياضيات، حيث نستخدم خواص كثيرات الحدود الجبرية وخواص المتسلسلات التحليلية لحل بعض مسائل العد.

(٣,١) مقدمة

يُختزل الكثير من مسائل العد إلى مسألة إيجاد الحد العـام a_n لمتتاليـة (a_n) من الشكل $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ وتعتبر طريقة الدوال المولِّدة إحدى الطرائق الفعّالة لإيجاد a_n حيث نجد دالة مولدة للمتتالية (a_n) ثم نستخرج a_n منها.

تُعـرَّف **الدالـة المولـدة العاديـة** (ordinary generating function) $g(x)$ للمتتالية (a_n) بأنها متسلسلة القوى الشكلية (formal power series)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

وتُعرَّف **الدالة المولدة الأسية** (exponential generating function) $h(x)$ للمتتالية (a_n) بأنها المتسلسلة

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

الدالة المولدة العادية $g(x)$ للمتتالية (2^n) هي

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n=1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$$

ويمكن الوصول إلى كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x)=\frac{1}{1-2x}$ الذي يسمى **صيغة مختصرة** (closed formula) لِـ $g(x)$ من خلال منظورين مختلفين. الأول لا يتعلق بالدوال وتقارب المتسلسلات حيث ننظر إلى $\frac{1}{1-2x}$ على أنها النظير الضربي $(1-2x)^{-1}$ لمتسلسلة القوى الشكلية $1-2x$ في حلقة متسلسلات القوى الشكلية $\mathbb{C}[[x]]$ على حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$. أما الثاني فنرى من خلاله $\frac{1}{1-2x}$ على أنها دالة ممثلة بمتسلسلة القوى $1+2x+2^2x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$ عندما $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. وتوخياً للسهولة فإننا سنعتمد المقاربة الثانية لتقديم الدوال المولِّدة. ويستطيع القارئ أن يعود إلى أحد كتب حساب التفاضل والتكامل لمراجعة موضوع متسلسلات القوى وتمثيل الدوال بها.

مثال(٣,١)

جد الدالة المولدة العادية للمتتالية $1,1,\ldots,1,\ldots$.

الحل

$$g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$$

مثال(٣,٢)

جد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $1,1,\ldots,1,\ldots$.

الحل

$$h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

ومن هنا جاء استخدام كلمة "أسية" في التعريف.

ملاحظات

فيما يلي سنستخدم الاصطلاحات التالية:

١- نستخدم عبارة "الدالة المولِّدة" بدلاً من "الدالة المولدة العادية".

٢- نستخدم عبارة "المولِّدة لـ a_n" بدلاً من "المولِّدة لـلمتتالية (a_n)".

٣- إذا كان نص المسألة لا يحتوي صراحة أو ضمناً على متتالية واستخدمنا عبارة "جد الدالة المولِّدة لـ ..." فإننا نقصد بذلك تعميم المسألة بحيث تحتوي على متتالية يكون حل المسألة الأصلية أحد حدودها.

(٣,٢) الدوال المولدة العادية

مثال(٣,٣)

كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + X_2 = r$ إذا كانت $0 \le X_1 \le 1$ و $1 \le X_2 \le 2$؟

الحل

من الجدول أدناه يتضح أنه يوجد حل واحد إذا كانت $r = 1$ أو $r = 3$ وحلان إذا كانت $r = 2$.

X_1	X_2	$X_1 + X_2$
0	1	1
0	2	2
1	1	2
1	2	3

مثال(٣,٤)

أوجد مفكوك $(x^0 + x^1)(x^1 + x^2)$

الحل

$$(x^0 + x^1)(x^1 + x^2) = x^0(x^1 + x^2) + x^1(x^1 + x^2)$$

$$= x^0x^1 + x^0x^2 + x^1x^1 + x^1x^2 = x^{0+1} + x^{0+2} + x^{1+1} + x^{1+2}$$

$$= x^1 + x^2 + x^2 + x^3 = x^1 + 2x^2 + x^3$$

لاحظ أن معامل x^1, x^2, x^3 في مفكوك $(x^0 + x^1)(x^1 + x^2)$ يساوي عدد حلول المعادلة في مثال(٣,٣) عندما $r = 1, r = 2, r = 3$ على الترتيب. ويمكن تعميم هذه الملاحظة كما في المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣,١)

ليكن a_r هو عدد الحلول الصحيحة للمسألة

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$$

$X_i = \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$

إن الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_r) هي

$$g(x) = (x^{\alpha_{1,1}} + x^{\alpha_{1,2}} + \cdots)(x^{\alpha_{2,1}} + x^{\alpha_{2,2}} + \cdots)\cdots(x^{\alpha_{n,1}} + x^{\alpha_{n,2}} + \cdots)$$

البرهان

إن حداً نمطياً في مفكوك $g(x)$ قبل التبسيط وتجميع الحدود المتشابهة يكون على الشكل المرتب $x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_n}$ حيث الحد x^{α_i} مأخوذ من العامل $(x^{\alpha_{i,1}}+x^{\alpha_{i,2}}+\cdots)$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. وبعد التبسيط يكون الحد النمطي على الشكل $x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$. وللحصول على x^r لا بد أن يكون $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$. أي، لا بد أن يكون $X_1=\alpha_1,\ X_2=\alpha_2,\ldots,X_n=\alpha_n$ حلاً للمسألة المعطاة. وبالتالي فإن معامل x^r في مفكوك $g(x)$ يساوي a_r. إذن $g(x)$ هي الدالة المولدة العادية للمتتالية (a_r).

نتيجة(٣,١)

لكل عدد صحيح $n\ge 1$ فإن

$$(1-x)^{-n}=(1+x+x^2+\cdots)^n$$
$$=\binom{n-1+0}{0}+\binom{n-1+1}{1}x+\cdots+\binom{n-1+k}{k}x^k+\cdots$$

البرهان

$(1+x+x^2+\cdots)^n$ هي الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+X_2+\cdots+X_n=k$. ومن نتيجة(١,١) فإن معامل x^k في $(1+x+x^2+\cdots)^n$ هو $\binom{n-1+k}{k}$.

مثال(٣,٥)

أوجد الدالة المولدة لعدد المجموعات الجزئية من السعة r المأخوذة من مجموعة سعتها n.

الحل

المتتالية (a_r) هي $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n},0,0,\cdots$ وعليه فإن الدالة المولدة هي

$$g(x)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$$

مثال(٣,٦)

أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+2X_2+3X_3+4X_4=30$.

الحل

لكل $1\le i\le 4$ ضع $Y_i=iX_i$. ومنه $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=30$. أي أن الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+2X_2+3X_3+4X_4=30$ هي نفسها الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=30$ حيث

$Y_1=0,1,2,\dots,k,\dots$ و $Y_2=0,2,4,\dots,2k,\dots$ و $Y_3=0,3,6,\dots,3k,\dots$ و $Y_4=0,4,8,\dots,4k,\dots$. من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة هي

$$g(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$

مثال(٣,٧)

أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=10$ إذا كان $X_i=0,2,4,\cdots$ لكل $i=1,2,3$.

الحل

من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة هي $g(x)=(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)^3$.

مثال(٣,٨)

أوجد الدالة المولدة لعدد طرق اختيار أربعة أعداد غير متعاقبة من بين الأعداد $1,2,\dots,n$.

الحل

افرض أن $1 \le n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \le n$ أعداد غير متعاقبة. لتكن

$$X_1 = n_1, X_2 = n_2 - n_1, X_3 = n_3 - n_2, X_4 = n_4 - n_3, X_5 = n - n_4$$

لاحظ أن $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = n$. كذلك $X_1 \ge 1$ و$X_5 \ge 0$. بما أن الأعداد غير متعاقبة فإن $X_i \ge 2$ لكل $2 \le i \le 4$. عليه، أي حل صحيح للمعادلة $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = n$ بحيث $X_1 \ge 1$ و$X_5 \ge 0$ و$X_i \ge 2$ لكل $2 \le i \le 4$ يعطي أربعة أعداد غير متعاقبة والعكس صحيح. من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة هي $g(x) = (x + x^2 + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots)^3(1 + x + x^2 + \cdots)$.

إن استخراج a_r من الدالة المولدة $g(x)$ يتطلب أحياناً إيجاد مفكوك عبارات من الشكل $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$ ومن الشكل $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n$. وهذا ما تفصّله المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣,٢)

لكل عدد صحيح $n \ge 0$ فإن:

(أ) $$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

(ب) $$(1-x^m)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^{rm}$$

(ج) $$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

(د) $$(1+x+x^2+\cdots)^n=(1-x)^{-n}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+n-1}{r}x^r$$

(هـ) $$(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n=(1-x^m)^n(1-x)^{-n}$$

(و) $$(\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^r)(\sum_{r=0}^{\infty}b_r x^r)=\sum_{r=0}^{\infty}(a_0b_r+a_1b_{r-1}+\cdots+a_rb_0)x^r$$

البرهان

باستخدام مبرهنة ذات الحدين نحصل بسهولة على كل من (أ) و(ب). وتم إثبات (د) في نتيجة(٣,١) وبعد مبرهنة(٥، ١) مباشرةً وأما (و) فهي تعريف حاصل ضرب متسلسلتي قوى. وأخيراً فإن $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})=1-x^m$ تؤدي إلى (هـ).

مثال(٣,٩)

أوجد معامل x^{20} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots)^3$.

الحل

$$(x^3+x^4+\cdots)^3=(x^3(1+x+x^2+\cdots))^3=x^9(1+x+x^2+\cdots)^3=x^9(1-x)^{-3}$$
$$=x^9\left\{\binom{3-1+0}{0}+\binom{3-1+1}{1}x+\cdots+\binom{3-1+k}{k}x^k+\cdots\right\}$$

ومنه معامل x^{20} يساوي

$$\binom{3-1+11}{11}=\binom{13}{11}=\binom{13}{2}=78$$

مثال(٣,١٠)

أوجد معامل x^9 في مفكوك $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$.

الحل

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4=\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4=(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

$$=\left\{\binom{4}{0}-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\binom{4}{3}x^{18}+\binom{4}{4}x^{24}\right\}\left\{\binom{4-1+0}{0}+\binom{4-1+1}{1}x+\cdots\right\}$$

ومنه معامل x^9 يساوي

$$\binom{4}{0}\binom{4-1+9}{9}-\binom{4}{1}\binom{4-1+3}{3}=\binom{12}{9}-4\binom{6}{3}=220-80=140$$

مثال(٣,١١)

جد عدد طرق الحصول على المجموع 9 عند رمي ثلاثة أحجار نرد مختلفة.

الحل

لكل $i=1,2,3$ ليكن X_i هو العدد الذي يظهر على الحجر رقم i. عليه، العدد المطلوب هو عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=9$ بحيث $1\le X_i\le 6$. ليكن a_r هو عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3=r$ بحيث $1\le X_i\le 6$. من مبرهنة(٣,١)، الدالة المولدة للمتتالية (a_r) هي $g(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$. وبالتالي فإن العدد المطلوب هو a_9 ويمكن حسابه كما يلي:

$$g(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3=x^3(1+x+\cdots+x^5)^3=x^3\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3$$

$$=x^3\frac{(1-x^6)^3}{(1-x)^3}=x^3(1-x^6)^3(1-x)^{-3}=x^3(1-3x^6+3x^{12}-x^{18})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{3-1+r}{r}x^r$$

$$=(x^3-3x^9+3x^{15}-x^{21})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+2}{r}x^r$$

ومنه

$$a_9 = \binom{6+2}{6} - 3\binom{0+2}{0} = \binom{8}{6} - 3\binom{2}{0} = 28 - 3 = 25$$

مثال(٣,١٢)

جد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 20$ بحيث $X_i \geq 0$ لكل $i = 1,2,3$.

الحل

لنضع $Y_1 = X_1$ و $Y_2 = 2X_2$ و $Y_3 = 5X_3$. فيكون العدد المطلوب هو عدد الحلول للمسألة

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 20$$

$$Y_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$Y_2 = 0,2,4,\ldots$$

$$Y_3 = 0,5,10,\ldots$$

إذن المطلوب هو c_{20} حيث c_r هو عدد الحلول الصحيحة للمسألة

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = r$$

$$Y_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$Y_2 = 0,2,4,\ldots$$

$$Y_3 = 0,5,10,\ldots$$

ولهذا الغرض نفرض أن $g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$ هي الدالة المولدة للمتتالية (c_r) .

بالاستناد إلى مبرهنة(٣,١) نجد أن

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

إذن $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)} = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$

ضع $\frac{1}{(1-x)} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ و $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$

عندئذٍ $a_r = 1$ لكل $r = 0,1,2,\ldots$ ، $\frac{1}{(1-x)} = (1-x^2)\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ ،

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = (1-x^5)\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$$

إذن $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = (1-x^2)\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ ، $\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r = (1-x^5)\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$

وبالتالي فإن

$b_r = a_r + b_{r-2} = 1 + b_{r-2}$ لكل $r \geq 0$ ، $c_r = b_r + c_{r-5}$ لكل $r \geq 0$

حيث $b_r = c_r = 0$ عندما يكون $r < 0$.

وبالحساب المباشر نجد أن

$$b_0 = 1,\ b_5 = 3,\ b_{10} = 6,\ b_{15} = 8,\ b_{20} = 11$$

ومنه فإن

$$c_0 = 1,\ c_5 = 4,\ c_{10} = 10,\ c_{15} = 18,\ c_{20} = 29$$

وبالتالي فإن عدد حلول المسألة المعطاة هو $c_{20} = 29$.

لكل عدد صحيح $n \geq 0$ ، ليكن p_n هو عدد تجزئات n و$p_0 = 1$ اصطلاحاً. تزودنا المبرهنة التالية بالدالة المولدة للمتتالية (p_n) ؛ والجدير بالذكر أنه لا توجد طريقة سهلة معروفة لاستخراج p_n من هذه الدالة.

مبرهنة(٣,٣)

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (p_n) ، فإنه يمكن كتابة $g(x)$ على شكل حاصل الضرب اللانهائي $g(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$.

البرهان

لأي تجزئة للعدد n ولكل $1\le i\le n$ ، ليكن X_i هو عدد مرات ظهو ر العدد i في تلك التجزئة. إذن $1X_1+2X_2+\cdots+nX_n=n$ حيث $X_i\ge 0$ عدد صحيح لكل $1\le i\le n$. وبوضع $Y_i=iX_i$ لكل $1\le i\le n$ نجد أن p_n يساوي عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=n$ حيث $Y_i=o,i,2i,\ldots$ لكل $1\le i\le n$.

وبتطبيق مبرهنة(٣,١) نجد أن p_n يساوي معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)^{-1}$.

ومن الناحية الأخرى، لحساب معامل x^n في مفكوك $g(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$ فإننا نهمل العوامل

$$(1-x^k)^{-1}=\frac{1}{1-x^k}=(1+x^k+x^{2k}+\cdots)$$

حيث $k>n$ ، وبالتالي فإننا نحسب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)^{-1}$. وهكذا فإن p_n يساوي معامل x^n في مفكوك $g(x)$. إذن $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (p_n).

لكل عدد صحيح $n\ge 1$ ، ليكن e_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة وعددها زوجي وليكن o_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة وعددها فردي.

مثال(٣,١٣)

إذا كان $q_n = e_n - o_n$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$ و $q_o = 1$ ، فإنه يمكن كتابة الدالة المولّدة للمتتالية (q_n) على الشكل $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$.

البرهان

نجد بسهولة أن $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث a_n هو عدد تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة و $a_0 = 1$ (انظر تمرين ٣٠ في نهاية هذا البند). ولحساب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ فإننا نهمل العوامل $(1-x^k)$ حيث $k > n$. وبالتالي فإننا نحسب معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)$. نلاحظ أن كل تجزئة للعدد n بحيث تكون أجزاؤها مختلفة وعددها r تساهم بالعدد $(-1)^r$ في معامل x^n . فمثلاً التجزئة $13 = 1 + 3 + 4 + 5$ تقابل الحد $(-x)(-x^3)(-x^4)(-x^5)$ في مفكوك $\prod_{k=1}^{13}(1-x^k)$ وبالتالي فهي تساهم بالعدد $(-1)^4$ في معامل x^{13} ، أما التجزئة $13 = 2 + 4 + 7$ فإنها تقابل الحد $(-x^2)(-x^4)(-x^7)$ في مفكوك $\prod_{k=1}^{13}(1-x^k)$ وبالتالي فهي تساهم بالعدد $(-1)^3$ في معامل x^{13} . ولما كان $(-1)^m = 1$ لكل عدد زوجي m و $(-1)^t = -1$ لكل عدد فردي t فإنه ينتج أن معامل x^n في مفكوك $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ يساوي $e_n - o_n$.

مبرهنة(٣,٤)

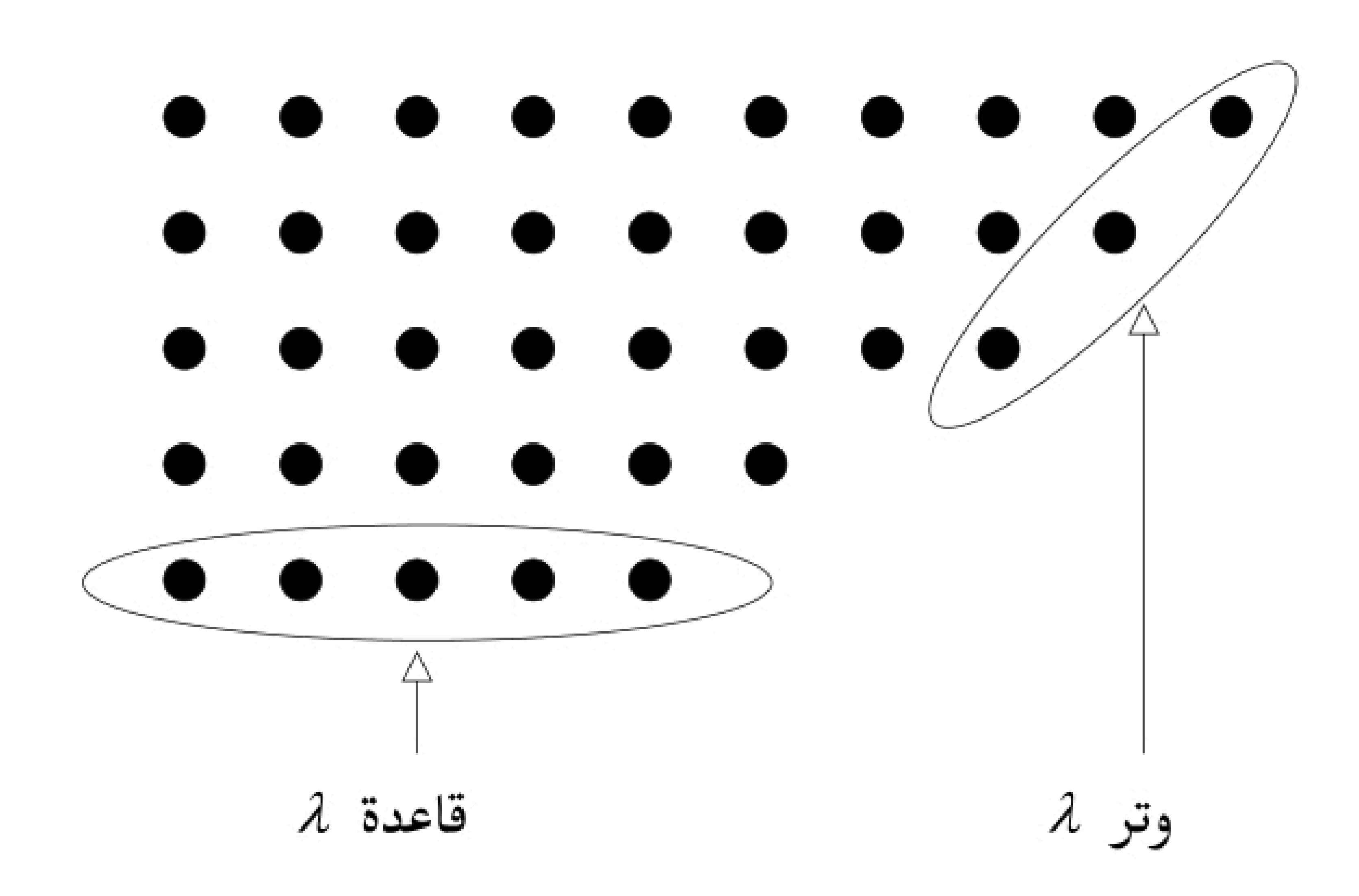
إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن

$$e_n - o_n = \begin{cases} (-1)^k & , n = \frac{k(3k\mp 1)}{2} \\ 0 & , n \neq \frac{k(3k\mp 1)}{2} \end{cases}$$

حيث k عدد صحيح موجب.

البرهان

لتكن S هي مجموعة تجزئات n التي أجزاؤها مختلفة. إذا كانت $\lambda \in S$ وكان F هو شكل فيريرز المصاحب لِ λ فإننا نستخدم الرمز $b(\lambda)$ للدلالة على أصغر أجزاء λ ونسمي السطر المقابل لِ $b(\lambda)$ في F قاعدة λ ؛ كما نستخدم الرمز $h(\lambda)$ للدلالة على طول أطول متتالية متناقصة حدودها أعداد صحيحة متعاقبة وحدها الأول هو أكبر أجزاء λ وحدودها الأخرى أجزاء لِ λ ونسمي الخط المكون من النقاط الأخيرة في الأسطر المقابلة لحدود هذه المتتالية في F وتر λ. فمثلاً إذا كانت λ هي التجزئة $10+9+8+6+5$ فإن $b(\lambda)=5$ و $h(\lambda)=3$ ويوضح الشكل التالي كلا من وتر λ وقاعدة λ :



الآن، نعرّف العمليتين B و H على أشكال فيريرز كما يلي:

أولاً: إذا كـان $b(\lambda) \le h(\lambda)$ وكـان تقـاطع وتـر λ وقاعـدة λ خاليـاً أو إذا كـان $b(\lambda) \le h(\lambda) - 1$ وكان تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ فإن العمليـة B تعـني حذف قاعدة λ وتوزيع نقاطها نقطة نقطة على الأسـطر العليـا لتكـون وتـراً للـشكل الناتج.

ثانياً: إذا كان $b(\lambda) > h(\lambda)$ وكان تقـاطع وتـر λ وقاعـدة λ خاليـاً أو إذا كـان $b(\lambda) \ge h(\lambda) + 2$ وكان تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ فإن العمليـة H تعـني حذف وتر λ وإضافة نقاطه أسفل قاعدة λ لتكون قاعدة للشكل الناتج.

بمـا أن إجـراء B يتطلـب أن يكـون $b(\lambda) \le h(\lambda)$ وإجـراء H يتطلـب أن يكون $b(\lambda) > h(\lambda)$ فإنه يمكن على الأكثر إجراء إحـدى العمليـتين B و H علـى أي شكل F من أشكال فيريرز. ويمكن التحقق بسهولة مـن أنـه إذا كـان إجـراء B على الشكل F ممكناً ويعطي الشكل F' فإن إجـراء H علـى F' ممكـن ويعطـي F. وبالمثل إذا كان إجـراء H علـى الـشكل F ممكنـاً ويعطـي الـشكل F'' فـإن إجراء B علـى F'' ممكـن ويعطـي F. ولمـا كانـت كـل مـن B و H تغـير عـدد الأجزاء بواحد فإن B و H تحدثان تقابلاً بين مجموعـة التجزئـات الـتي أجزاؤهـا مختلفة وعددها زوجي ومجموعة التجزئات التي أجزاؤها مختلفة وعددها فردي كلما كان إجراء B و H ممكناً. وبالتالي فإن $e_n - o_n = 0$ في هذه الحالة.

إذا كان $b(\lambda) \le h(\lambda)$ فإنه لا يمكـن إجـراء B في حالـة واحـدة فقـط وذلـك عندما يكون تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ و $b(\lambda) = h(\lambda)$. لتكن الحال كذلك و $b(\lambda) = h(\lambda) = k$. إذن

$$n = k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (2k-1) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

إذا كان $b(\lambda) > h(\lambda)$ ، فإنه لا يمكن إجراء H في حالة واحدة فقط وذلك عندما يكون تقاطع وتر λ وقاعدة λ غير خالٍ و $b(\lambda) - 1 = h(\lambda)$. لتكن الحال كذلك و $b(\lambda) - 1 = h(\lambda) = k$. إذن

$$n = (k+1) + (k+2) + (k+3) + \cdots + 2k = \frac{k(3k+1)}{2}$$

وبملاحظة أنه لا يوجد عددان صحيحان موجبان k', k'' بحيث $\frac{k'(3k'-1)}{2} = \frac{k''(3k''+1)}{2}$ فنجد أنه يمكن إحداث التقابل المذكور أعلاه بعد حذف شكل واحد عدد أسطره k من أشكال فيريرز عندما يكون $n = \frac{k(3k \mp 1)}{2}$. وبالتالي فإن $e_n - o_n = (-1)^k$ في هذه الحالة. □

تنتج المتطابقة التالية مباشرة من مبرهنة(٣,٤) ومثال(٣,١٣).

مبرهنة(٣,٥) (متطابقة أويلر Euler's Identity)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2}) \quad \square$$

بالاستناد إلى متطابقة أويلر ومبرهنة(٣,٣) نحصل على المتطابقة

$$[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2})][\sum_{r=0}^{\infty} p(r)x^r] = 1$$

وبعد حساب معامل x^n ، $n \geq 1$ من الطرف الأيسر لهذه المتطابقة ومساواته بالصفر نحصل على العلاقة الارتدادية

$$(*) \;............\; p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) +$$
$$p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) + p(n-26) + \cdots$$

التي يتكون طرفها الأيمن من عددٍ منتهٍ من الحدود $p(n-k)$ حيث $n-k \geq 0$.
ويمكن استخدام هذه العلاقة الارتدادية بفعالية لحساب $p(n)$ كما يوضح المثال التالي.

مثال(٣,١٤)

احسب $p(11)$.

الحل

$p(0)=1$ اصطلاحاً، وبالحساب المباشر نجد أن

$$p(1)=1,\ p(2)=2,\ p(3)=3,\ p(4)=5,\ p(5)=7$$

الآن، نستخدم العلاقة الارتدادية (*) لإنشاء الجدول التالي الذي يبين أن $p(11)=56$.

n	6	7	8	9	10	11
$p(n-1)$	7	11	15	22	30	42
$p(n-2)$	5	7	11	15	22	30
$p(n-5)$	1	2	3	5	7	11
$p(n-7)$	–	1	1	2	3	5
$p(n)$	11	15	22	30	42	56

المبرهنة التالية تبّين لنا كيف ننشئ دالة مولدة جديدة من دوال مولدة معطاة. وستظهر أهمية هذا الإنشاء في حل المسائل المتعلقة بإيجاد بعض المجاميع.

مبرهنة(٣,٦)

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) و $h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (b_n)، فإن:

(أ) $\frac{g(x)}{1-x}$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$.

(ب) $C_1 g(x) + C_2 h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(C_1 a_n + C_2 b_n)$، حيث C_1, C_2 ثابتان.

(ج) $(1-x)g(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(a_n - a_{n-1})$.

(د) $xg'(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية (na_n)، حيث $g'(x)$ هي مشتقة $g(x)$.

(هـ) $g(x)h(x)$ هي الدالة المولدة للمتتالية $(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$ التي تسمى التفاف (convolution) المتتاليتين (a_n) و (b_n).

البرهان

يمكن للقارئ إثبات المطلوب بسهولة. وفيما يلي نقدم برهاناً للفقرة (د) على سبيل المثال.

بما أن $g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ فإن $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. وبالتالي فإن $xg'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$.

مثال(٣,١٥)

أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (n^2).

الحل

الدالة المولدة للمتتالية (1) هي $\frac{1}{1-x}$ ومن فقرة (د) من مبرهنة(٣,٦) تكون الدالة المولدة للمتتالية (n) هي

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x\frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

من فقرة (د) من مبرهنة(٣,٦) تكون الدالة المولدة للمتتالية (n^2) هي

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x\left[\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4}\right] = x\left[\frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3}\right] = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

مثال(٣,١٦)

أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية $(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2)$. ثم جد $1^2+2^2+\cdots+n^2$.

الحل

من مثال(٣,١٥) وباستخدام الفقرة (أ) من مبرهنة(٣,٦) تكون الدالة المولدة للمتتالية $(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2)$ هي

$$\frac{1}{(1-x)}\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = (x+x^2)(1-x)^{-4}$$

$$= (x+x^2)\left[\binom{4-1+0}{0} + \binom{4-1+1}{1}x + \binom{4-1+2}{2}x^2 + \cdots\right]$$

ومنه معامل x^n يساوي

$$\binom{4-1+n-1}{n-1} + \binom{4-1+n-2}{n-2} = \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تمارين (٣,١)

١- أوجد الدالة المولدة للمتتالية $2,2,2,\cdots$.

٢- أوجد الدالة المولدة للمتتالية $2^0,2^1,2^2,\cdots$.

٣- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)(1+2x^2+3x^3+\cdots)$.

٤- ما هي الدالة المولدة لعدد المتتاليات الثنائية من الطول r؟

٥- ما هي الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$؟

٦- ما هي الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ بحيث يظهر كل عنصر على الأقل مرة واحدة؟

٧- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4=r$ إذا كان $X_k>k$ لكل $k=1,2,3,4$.

٨- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=r$ إذا كانت X_1,X_3,X_5 أعداداً زوجية وكان X_2,X_4 عددين فرديين.

٩- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=r$ حيث $X_1+X_2=6$ و $X_k\geq 0$ لكل $k=1,2,\ldots,6$.

١٠- أوجد الدالة المولدة لعدد الحلول الصحيحة للمعادلة $2X_1+3X_2+5X_3=r$ إذا كان $X_k>k$ لكل $k=1,2,3$.

١١- أوجد الدالة المولدة لعدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n صندوقاً مختلفاً بحيث لا يوجد صندوق خالٍ وعدد الكرات فردي في كل صندوق.

١٢- أوجد الدالة المولدة لعدد الأعداد الصحيحة غير السالبة التي هي أصغر من مائة ألف ومجموع أرقامها r.

١٣- أوجد الدالة المولدة لعدد طرق اختيار 3 من الأعداد المختلفة من بين الأعداد $1,2,\ldots,n$ بحيث لأي عددين x, y منها يكون $2<|x-y|$. ثم أوجد عدد طرق الاختيار في حالة $n=30$.

١٤- وضح لماذا $(1+x+x^2+\cdots+x^r)^3$ ليست الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,x_3\}$؟ ما هي الدالة المولدة الصحيحة؟

١٥- وضح لماذا $(1+x+x^2+\cdots+x^r)^r$ ليست الدالة المولدة لعدد المجموعات المضاعفة التي عدد عناصرها r والمأخوذة من المجموعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$؟

١٦- بيّن أن $g(x)=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ هي الدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n=\binom{2n}{n}$.

١٧- ما هو معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^3+\cdots)$؟

١٨- أوجد معامل x^{12} في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^3$.

١٩- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^{10}$.

٢٠- أوجد معامل x^{24} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots+x^{12})^4$.

٢١- أوجد معامل x^6 في مفكوك $(x+x^2+\cdots)^3(1-x^3)^3$.

٢٢- أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(x^3+x^4+\cdots)^3(x+x^2+\cdots+x^5)(1-x^5)^3$.

٢٣- أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(x^2+x^3+\cdots)^3(x+x^2+x^3+x^4)(1-x^3)^3$.

٢٤- أوجد معامل x^5 في مفكوك $(1-x^2)^{12} \big/ (1-x)^3$.

٢٥- أوجد معامل x^r في مفكوك $(1+x+x^2+\cdots)^r(1-x)^r$.

٢٦- أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n = n(n-1)$.

٢٧- أوجد صيغة مختصرة للدالة المولدة للمتتالية (a_n) حيث $a_n = n^2 3^n$.

٢٨- استخدم الدالة المولدة المطلوبة في تمرين ٢٦ لإيجاد صيغة مختصرة للمجموع $2\times 1 + 3\times 2 + \cdots + n(n-1)$.

٢٩- استخدم الدالة المولدة المطلوبة في تمرين ٢٧ لإيجاد صيغة مختصرة للمجموع $1^2 3 + 2^2 3^2 + \cdots + n^2 3^n$.

٣٠- لكل عدد صحيح $n \geq 0$، ليكن a_n هو عدد تجزئات $n > 0$ التي أجزاؤها مختلفة و $a_0 = 1$. أثبت أنه يمكن كتابة الدالة المولدة للمتتالية (a_n) على الشكل $g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$.

(٣,٣) الدوال المولدة الأسية

تُعنى الدوال المولدة الأسية بعدد التباديل. في هذا البند سنستخدم بعض الخواص الجبرية والتحليلية لمتسلسلات القوى لإيجاد عدد التباديل.

مثال(٣,١٧)

كم عدد المتتاليات من الطول r المأخوذة من المجموعة $\{A, B\}$ التي تظهر فيها A مرة واحدة على الأكثر وتظهر فيها B مرة أو مرتين؟

الحل

من الجدول أدناه يتضح أن عدد المتتاليات يساوي $\frac{1!}{0!1!}$ إذا كان $r=1$ و $\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{0!2!}$ إذا كان $r=2$ و $\frac{3!}{1!2!}$ إذا كان $r=3$.

العدد	عدد مرات ظهور B	عدد مرات ظهور A
$\frac{1!}{0!1!}$	1	1
$\frac{2!}{0!2!}$	2	0
$\frac{2!}{1!1!}$	1	1
$\frac{3!}{1!2!}$	2	1

مثال(٣,١٨)

أوجد مفكوك $\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)$

الحل

$$g(x)=\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)=\frac{x}{0!1!}+\left(\frac{1}{0!2!}+\frac{1}{1!1!}\right)x^2+\frac{x^3}{1!2!}$$

لاحظ أن معامل x^i في $g(x)$ مضروباً في $i!$ يساوي عدد المتتاليات من الطول i في مثال(٣,١٧) لكل $i=1,2,3$. يمكن تعميم هذه الملاحظة كما في المبرهنة التالية.

مبرهنة(٣,٧)

ليكن a_r هو عدد تباديل $r=r_1+r_2+\cdots+r_n$ شيئاً مأخوذاً من n نوعاً من الأشياء بشرط أن عدد العناصر r_i المأخوذة من النوع i يحقق $r_i=\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\ldots$ لكل $i=1,2,\ldots,n$. إن الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r) هي

$$g(x) = (\frac{x^{\alpha_{1,1}}}{\alpha_{1,1}!} + \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{\alpha_{1,2}!} + \cdots)(\frac{x^{\alpha_{2,1}}}{\alpha_{2,1}!} + \frac{x^{\alpha_{2,2}}}{\alpha_{2,2}!} + \cdots)\cdots(\frac{x^{\alpha_{n,1}}}{\alpha_{n,1}!} + \frac{x^{\alpha_{n,2}}}{\alpha_{n,2}!} + \cdots)$$

البرهان

إن حداً نمطياً في مفكوك $g(x)$ قبل التبسيط وتجميع الحدود المتشابهة يكون على الشكل المرتب

$$\frac{x^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdot \frac{x^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \cdot \cdots \cdot \frac{x^{\alpha_n}}{\alpha_n!}$$

حيث الحد $\frac{x^{\alpha_i}}{\alpha_i!}$ مأخوذ من العامل $(\frac{x^{\alpha_{i,1}}}{\alpha_{i,1}!} + \frac{x^{\alpha_{i,2}}}{\alpha_{i,2}!} + \cdots)$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. وبعد التبسيط يكون الحد النمطي على الشكل $\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$ وللحصول على $\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} x^r$ لا بد أن يكون $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = r$ وبالتالي فإن معامل $\frac{x^r}{r!}$ في مفكوك $g(x)$ يساوي $\sum \frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$ حيث المجموع مأخوذ على جميع العديدات $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ من النوع n التي تحقق $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = r$ وتحقق $\alpha_i \in \{\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2,\ldots}\}$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. وكما نعلم من مبرهنة(١،٦) فإن عدد تباديل $r = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ شيئاً مأخوذاً من n نوعاً من الأشياء بشرط أن عدد الأشياء المأخوذة من النوع i يساوي α_i هو $\frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$. إذن معامل $\frac{x^r}{r!}$ في مفكوك $g(x)$ يساوي a_r. وبالتالي فإن $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_r).

مثال(٣,١٩)

كم عدد طرق ترتيب 7 حروف مأخوذة من المجموعة $\{A,B,C\}$ إذا كان عدد مرات ظهور A هو 2 أو 3 أو 6 و عدد مرات ظهور B هو 1 أو 5 و عدد مرات ظهور C هو 0 أو 3 أو 7.

الحل

من مبرهنة(٣,٧)، العدد المطلوب يساوي $7!$ مضروباً في معامل x^7 في مفكوك الدالة

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^5}{5!}\right)\left(1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}\right)$$

معامل x^7 في $g(x)$ يساوي $\frac{1}{2!5!}+\frac{1}{3!1!3!}+\frac{1}{6!1!}$؛ ومنه فالعدد المطلوب يساوي

$$\frac{7!}{2!5!}+\frac{7!}{3!1!3!}+\frac{7!}{6!1!}=168$$

مثال(٣,٢٠)

أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.

الحل

عدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n يساوي $(n)_r$ ومنه فإن الدالة المولدة الأسية المطلوبة هي

$$g(x)=\frac{(n)_0}{0!}+\frac{(n)_1}{1!}x+\frac{(n)_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(n)_n}{n!}x^n$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$$

ملاحظة: يتضح من مثال(٣,٥) و مثال(٣,٢٠) أن $(1+x)^n$ هي الدالة المولدة العادية لعدد التوافيق من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n وأنها نفسها هي الدالة المولدة الأسية لعدد التباديل من الطول r المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.

إن استخراج a_r من الدالة المولدة الأسية يتطلب أحياناً إيجاد مفكوك عبارات تحتوي على دوال أسية. ونقدم في المبرهنة التالية بعض العلاقات المفيدة في هذا المجال.

مبرهنة(٣,٨)

(أ) $$(e^x)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!} = e^{nx}$$

(ب) $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(ج) $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

البرهان

يمكن للقارئ إثبات المطلوب بسهولة. وفيما يلي نقدم برهاناً جبرياً وآخر تركيبياً للفقرة (أ).

(١) البرهان الجبري:

$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)^n = (e^x)^n = e^{nx} = 1+\frac{nx}{1!}+\frac{n^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{n^kx^k}{k!}+\cdots$$

(٢) البرهان التركيبي: ليكن a_k هو عدد المتتاليات من الطول k المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n، ولتكن $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_k).

نجد $g(x)$ بطريقتين مختلفتين. ينتج من مبرهنة(٣,٧) أن

$$g(x) = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots)^n$$

ومن ناحية أخرى، نعلم من بند (١,٣) أن $a_k = n^k$. إذن،

$$g(x) = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{n^kx^k}{k!} + \cdots$$

وبالتالي فإن

$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n^2x^2}{2!} + \cdots$$

مثال(٣,٢١)

كم عدد المتتاليات الثنائية من الطول r والتي تحوي عدداً فردياً من الأصفار؟

الحل

الدالة المولدة الأسية لعدد المتتاليات المطلوب هي

$$g(x) = (\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots)(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots)$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]e^x = \frac{e^{2x} - 1}{2} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}$$

ومنه معامل x^r في $g(x)$ يساوي $\frac{2^{r-1}}{r!}$. ومن مبرهنة(٣,٧)، العدد المطلوب يساوي 2^{r-1}.

مثال(٣,٢٢)

كم عدد المتتاليات من الطول r المأخوذة من المجموعة $\{1,2,3,4\}$ والتي يظهر فيها كل من $1,2,4$ مرة واحدة على الأقل؟

الحل

الدالة المولدة الأسية للعدد المطلوب هي

$$g(x) = (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots)^3 = e^x(e^x-1)^3$$

$$= e^x\left[e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1\right] = e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x$$

وعليه فإن معامل x^r في مفكوك $g(x)$ يساوي $\frac{4^r}{r!}-3\frac{3^r}{r!}+3\frac{2^r}{r!}-\frac{1}{r!}$. ومن مبرهنة(٣,٧)، العدد المطلوب يساوي $4^r-3^{r+1}+3.2^r-1$.

وفي ختام هذا الفصل نشير إلى أن الدوال المولدة تؤدي دوراً مهماً في معالجة موضوع العلاقات الارتدادية وسنرى ذلك بشيء من التفصيل في فصل قادم.

تمارين (٣,٢)

١- كم عدد طرق ترتيب 4 من حروف كلمة ENGINE؟

٢- أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد الكلمات من الطول r والمأخوذة حروفها من الأبجدية $\{a,b,c,d\}$.

٣- أوجد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $(r!)$.

٤- أوجد الدالة المولدة الأسية للمتتالية $(a_r)=(1/r)$ حيث $a_0=0$.

٥- أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد طرق توزيع r شخصاً على n غرفة مختلفة بحيث لا يقل عدد الأشخاص في الغرفة الواحدة عن اثنين ولا يزيد عن خمسة.

٦- أوجد الدالة المولدة الأسية لعدد الكلمات من الطول $r \geq 0$ والمأخوذة حروفها من الكلمات التالية:

(أ) MISSISSIPPI

(ب) HAWAII

(ج) ISOMORPHISM

٧- أوجد حل فقرة (أ) من تمرين ٦ عندما تظهر I في الكلمة مرتين على الأقل.

إذا كانت $g(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (a_n) و $h(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (b_n) فأثبت أن $g(x)h(x)$ هي الدالة المولدة الأسية للمتتالية (c_n) حيث $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$. تسمى c_n التفاف ذات الحدين (binomial convolution) للمتتاليتين (a_n) و (b_n).

الفصل الرابع

العلاقات الارتدادية
RECURRENCE RELATIONS

في كثير من مسائل العدّ، تؤدي دراسة المسألة وتحليلها إلى كتابة الحل على شكل متتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$. أحياناً، نكتفي بوصف حدود المتتالية لتعذر إيجاد أي علاقات بين تلك الحدود. فمثلاً، متتالية الأعداد الأولية $2,3,5,7,11,\ldots$ لا يعرف لحدها العام أي صيغة جبرية صريحة كما لا تعرف أي علاقة بين حدود المتتالية. وأحياناً أخرى، يمكن التعبير بسهولة عن الحدّ العام بصيغة جبرية صريحة كما في حالة المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية. وفي بعض المسائل، يمكن حساب الحدّ العام a_n ارتدادياً؛ أي، يمكن كتابة معادلة تعطينا a_n بدلالة بعض الحدود a_r حيث $r < n$. تسمى المعادلة علاقة ارتدادية، وإذا أمكن التعبير عن a_n بصيغة جبرية صريحة فإنه يقال إن العلاقة الارتدادية قد 'حلّت. ولبعض الأغراض تكون الصيغة الجبرية الصريحة للحدّ العام a_n مفيدة، ولكن العلاقة الارتدادية تكون أكثر فائدة لأغراض أخرى مثل حساب a_n لقيمة معطاة n.

في هذا الفصل، نقدم أصنافاً من العلاقات الارتدادية التي توجد طرائق لحلّها، كما نعالج بعض المسائل التي يمكن بناء علاقات ارتدادية لها. وسيلاحظ القارئ أن المقاربة المتبعة في دراسة العلاقات الارتدادية تُذكِّر بطريقة معالجة المعادلات التفاضلية العاديّة.

(٤,١) مقدمة

لتكن $a_0, a_1, a_2, \ldots$ متتالية. كل صيغة تُعبّر عن الحدّ العام a_n بدلالة واحد أو أكثر من الحدود السابقة له $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$، لكل $n \geq k$ حيث k عدد صحيح موجب وثابت، تسمى **علاقة ارتدادية** للمتتالية $a_0, a_1, a_2, \ldots$. نلاحظ أن كل حد من الحدود $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ لا يحقق العلاقة الارتدادية؛ تسمى قيم هذه الحدود **بالشروط الابتدائية للمتتالية**. وتسمى متتالية ما حلاً لعلاقة ارتدادية معطاة إذا كانت حدود المتتالية تحقق العلاقة الارتدادية.

يقال عن علاقة ارتدادية إنها **خطية من الرتبة** k إذا كان يمكن كتابتها على الصورة $u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g(n)$ حيث $f_1, f_2, \ldots, f_k, g$ دوال معّرفة لكل n و f_k ليست دالة صفرية. إذا كانت g دالة صفرية فإن العلاقة تسمى **متجانسة**؛ ويقال إن العلاقة **غير متجانسة** عندما تكون g ليست دالة صفرية. كما يقال إن العلاقة **ذات معاملات ثابتة** عندما تكون $f_1, f_2, \ldots, f_k$ دوالاً ثابتة.

تبيّن المبرهنة التالية أن حل العلاقة الارتدادية الخطية يكون وحيداً عندما تعطى الشروط الابتدائية.

مبرهنة(٤,١)

يوجد حل وحيد للعلاقة الارتدادية الخطية

$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g(n)$ **بحيث**

$u_0 = a_0, u_1 = a_1, \ldots, u_{k-1} = a_{k-1}$ **حيث** $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ **ثوابت معطاة.**

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن u_n معين بشكل وحيد لكل عدد صحيح $n \geq 0$. ينتج من الشروط الابتدائية أن كلاً من $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ معين بشكل وحيد. نفرض أن $n \geq k-1$ و $u_0, u_1, \ldots, u_n$ معينة بشكل وحيد. بما أن $n+1 \geq k$ ، فإن العلاقة الارتدادية تعطي

$$u_{n+1} = -f_1(n+1)u_n - f_2(n+1)u_{n-1} - \ldots - f_k(n+1)u_{n+1-k} + g(n+1)$$

وبالتالي ينتج من فرضية الاستقراء أن u_{n+1} معين بشكل وحيد. □

يساعد المبدأ التالي على إيجاد حلول للعلاقات الارتدادية الخطية.

مبرهنة(٤,٢) (مبدأ التراكب Superposition principle)

إذا كان $u_n^{(1)}$ حلاً للعلاقة الارتدادية

$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_1(n)$ وكان $u_n^{(2)}$ حلاً للعلاقة الارتدادية $u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_2(n)$ ، فإن $c_1u_n^{(1)} + c_2u_n^{(2)}$ يكون حلاً للعلاقة الارتدادية

$$u_n + f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \ldots + f_k(n)u_{n-k} = g_1(n) + g_2(n)$$

البرهان

$$[c_1u_n^{(1)}+c_2u_n^{(2)}]+f_1(n)[c_1u_{n-1}^{(1)}+c_2u_{n-1}^{(2)}]+f_2(n)[c_1u_{n-2}^{(1)}+c_2u_{n-2}^{(2)}]+\cdots+$$
$$f_k(n)[c_1u_{n-k}^{(1)}+c_2u_{n-k}^{(2)}]$$
$$=c_1[u_n^{(1)}+f_1(n)u_{n-1}^{(1)}+f_2(n)u_{n-2}^{(1)}+\ldots+f_k(n)u_{n-k}^{(1)}]+$$
$$c_2[u_n^{(2)}+f_1(n)u_{n-1}^{(2)}+f_2(n)u_{n-2}^{(2)}+\ldots+f_k(n)u_{n-k}^{(2)}]$$
$$=c_1g_1(n)+c_2g_2(n).$$

(٤,٢) العلاقات الارتدادية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

في هذا البند نركز اهتمامنا على البحث عن حلول العلاقة الارتدادية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة. لتكن $u_n+d_1u_{n-1}+\ldots+d_ku_{n-k}=0$ علاقة ارتدادية خطية بحيث $d_1,d_2,\ldots,d_k$ ثوابت. واضح أن $u_n=0$ حل لهذه العلاقة، ويسمى الحل التافه أو الحل الصفري. إذا كان $u_n=\alpha^n$ حلاً غير تافه للعلاقة، فإن $\alpha\neq 0$ تحقق $\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_k\alpha^{n-k}=0$، وبالتالي فإن α تحقق $\alpha^k+d_1\alpha^{k-1}+\ldots+d_k=0$ ويقودنا هذا التحليل إلى التعريف التالي. لتكن $u_n+d_1u_{n-1}+d_2u_{n-2}+\ldots+d_ku_{n-k}=0$ علاقة ارتدادية ذات معاملات ثابتة. تسمى $P(x)=x^k+d_1x^{k-1}+\ldots+d_k$ **كثيرة الحدود المميزة** characteristic polynomial وتسمى $P(x)=0$ **المعادلة المميزة** characteristic equation أو **المعادلة المساعدة** auxiliary equation للعلاقة الارتدادية, وتسمى جذورها **الجذور المميزة** characteristic roots للعلاقة الارتدادية.

وفي الحالة التي تكون فيها الجذور المميزة مختلفة، فإنه يمكن كتابة حلول العلاقة الارتدادية بصورة بسيطة نسبياً، أما في الحالة الأخرى فإنه يمكن الوصول إلى الحلول ولكن ليس بالبساطة نفسها.

مبرهنة(٤,٣)

لتكن $u_n + d_1 u_{n-1} + \ldots + d_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة، وجذورها المميزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ مختلفة. عندئذ، لكل مجموعة من الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ يكون

$$u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n \qquad (*)$$

حلاً للعلاقة الارتدادية. ولكل حل للعلاقة الارتدادية، توجد ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ بحيث يمكن كتابة الحل على الشكل (*). تسمى العبارة المعطاة في (*) **بالحل العام** للعلاقة الارتدادية.

البرهان

بما أن كلاً من $u_n^{(1)} = \alpha_1^n, \ldots, u_n^{(k)} = \alpha_k^n$ حل للعلاقة الارتدادية، فإنه ينتج من مبدأ التراكب أن العبارة المعطاة في (*) حل للعلاقة الارتدادية. الآن نفرض أن $u_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية، ونبحث عن ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ بحيث يكون $u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \cdots + c_k \alpha_k^n$ حلاً يحقق الشروط الابتدائية $u_0 = b_0, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$. باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$
\begin{aligned}
&c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0 \\
&\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_k c_k = b_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_1^{k-1} c_1 + \alpha_2^{k-1} c_2 + \cdots + \alpha_k^{k-1} c_k = b_{k-1}
\end{aligned}
$$

وإذا كانت A هي مصفوفة المعاملات لهذا النظام من المعادلات الخطية، فإن محدد A يكون

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le k}(\alpha_j-\alpha_i)$$

لأنه على شكل محدد فاندرمند. وبما أن $\alpha_i \neq \alpha_j$ لكل $i \neq j$، فإن $\det(A)\neq 0$. إذن، يوجد لنظام المعادلات الخطية حل وحيد. وبالتالي، فإنه يوجد للعلاقة الارتدادية حل على الشكل (*) بحيث $u_0=b_0,\ldots,u_{k-1}=b_{k-1}$. ولكن هذا الحل وحيد حسب مبرهنة(٤،١)؛ إذن يكون هذا الحل هو $u_n=b_n$.

مثال(٤،١)

أوجد صيغة جبرية صريحة للحد العام لمتتالية فيبوناتشي التي تحقق $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ لكل $n\ge 2$ وحيث $a_0=a_1=1$.

الحل

المعادلة المميزة $x^2-x-1=0$ لها الجذران المختلفان $\alpha_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2},\alpha_2=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$.

إذن، الحل العام هو $a_n=c_1\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+c_2\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$. وينتج من $a_0=a_1=1$ أن

$$c_1+c_2=1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_2=1$$

وبحل نظام المعادلات نجد أن $c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, c_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ وبالتالي نجد أن $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$. وتجدر الإشارة هنا إلى أن استخدام العلاقة الارتدادية لحساب a_n أسهل من استخدام الصيغة الصريحة للغرض نفسه.

مثال(٤,٢)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0, n\geq 2$ حيث $a_0=2, a_1=5$.

الحل

المعادلة المميزة $x^2-5x+6=0$ لها الجذران المختلفان $\alpha_1=2, \alpha_2=3$. إذن، يمكن كتابة الحل العام على الشكل $a_n=c_1 2^n+c_2 3^n$. وينتج من $a_0=2, a_1=5$ أن

$$\begin{aligned} c_1+c_2&=2\\ 2c_1+3c_2&=5 \end{aligned}$$

وبحل نظام المعادلات نجد أن $c_1=c_2=1$. إذن $a_n=2^n+3^n$. □

يمكن للجذور المميزة للعلاقة الارتدادية أن تكون أعداداً مركبة. في هذه الحالة، غالباً ما نستخدم الصيغة المثلثية للعدد المركب لغرض كتابة الحل بشكل مناسب. في الحقيقة، يمكن برهان أنه إذا كان $a+ib\in\mathbb{C}^*$ حيث $i=\sqrt{-1}$ و $a,b\in\mathbb{R}$ وكان $a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث

$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r},\ -\pi<\theta\le\pi$، فإن $(a+ib)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ لكل عدد صحيح n. والجدير بالذكر هنا أنه في بعض المسائل يكون استخدام العلاقة الارتدادية لحساب a_n لأجل n معينة -كما في حساب أعداد فيبوناتشي- أبسط من استخدام الصيغة الصريحة للحل للغرض نفسه.

مثال(٤,٣)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n+2a_{n-1}+2a_{n-2}=0,\ n\ge 2$ حيث $a_0=1, a_1=2$.

الحل

المعادلة المميزة $x^2+2x+2=0$ لها الجذران $\alpha_1=-1+i,\ \alpha_2=-1-i$. إذن، الحل العام هو $a_n=c_1(-1+i)^n+c_2(-1-i)^n$ حيث $c_1,c_2\in\mathbb{C}$. وبإيجاد الصيغة المثلثية لكل من α_1,α_2 نجد أن

$\alpha_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\ \alpha_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. إذن

$$a_n=c_1\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3n\pi}{4}+i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)+c_2\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3n\pi}{4}-i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$$
$$=(c_1+c_2)\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{3n\pi}{4}+(c_1-c_2)i\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{3n\pi}{4}$$

وبوضع $k_1=(c_1+c_2),\ k_2=(c_1-c_2)i$ نجد أن

$a_n=k_1\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{3n\pi}{4}+k_2\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{3n\pi}{4}$. وينتج من $a_0=1, a_1=2$ أن

$$k_1 = 1$$

$$-k_1 + k_2 = 2$$

إذن $k_1 = 1,\ k_2 = 3$ وبالتالي فإن $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n cos\dfrac{3n\pi}{4} + 3\left(\sqrt{2}\right)^n sin\dfrac{3n\pi}{4}$.□

الآن نبدأ العمل على الحالة التي لا تكون فيها الجذور مختلفة.

مبرهنة(٤,٤)

لتكن $u_n + c_1u_{n-1} + \ldots + c_ku_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة من الرتبة k. إذا كان α جذراً مميزاً تكراره r ، فإن $u_n = n^m\alpha^n$ يكون حلاً للعلاقة الارتدادية لكل عدد صحيح $0 \le m < r$.

البرهان

نضع $c_0 = 1$ في الطرف الأيسر للعلاقة الارتدادية، فنجد أن

$$c_0u_n + c_1u_{n-1} + \ldots + c_ku_{n-k} = c_0n^m\alpha^n + c_1(n-1)^m\alpha^{n-1} + \ldots + c_k(n-k)^m\alpha^{n-k}$$

$$= \alpha^{n-k}\sum_{j=0}^{k} c_j(n-j)^m\alpha^{k-j} = \alpha^{n-k}\sum_{j=0}^{k} c_j\left[(n-k)+(k-j)\right]^m\alpha^{k-j}$$

$$= \alpha^{n-k}\sum_{j=0}^{k} c_j\left[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{m-i}(k-j)^i\right]\alpha^{k-j}$$

$$= \alpha^{n-k}(n-k)^m\sum_{j=0}^{k} c_j\alpha^{k-j}\left[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{-i}(k-j)^i\right]$$

$$= \alpha^{n-k}(n-k)^m\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{-i}\left[\sum_{j=0}^{k} c_j(k-j)^i\alpha^{k-j}\right]$$

$$= \alpha^{n-k}(n-k)^m\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(n-k)^{-i}P_i(\alpha)$$

حيث $P_i(x)=\sum_{j=0}^{k} c_j (k-j)^i x^{k-j}$ لكل $0 \le i \le m$. نلاحظ أن $P_0(x)=\sum_{j=0}^{k} c_j x^{k-j}$ هي كثيرة الحدود المميزة للعلاقة الارتدادية. ولكي يتم البرهان، يكفي إثبات أن $P_i(\alpha)=0$ لكل $0 \le i \le m$. لهذا الغرض يمكن التحقق بسهولة أن

$$P_{i+1}(x)=x\frac{d}{dx}[P_i(x)],\ 0 \le i \le m \qquad (*)$$

وبما أن α جذر مميز تكراره r، فإنه توجد كثيرة حدود $T_0(x)$ بحيث $P_0(x)=(x-\alpha)^r T_0(x)$ و $T_0(\alpha)\neq 0$. باستخدام العلاقة (*) نجد أنه يوجد كثيرة حدود $T_1(x)$ بحيث $P_1(x)=(x-\alpha)^{r-1}T_1(x)$ و $T_1(\alpha)\neq 0$. وهكذا، بالاستخدام المتكرر العلاقة (*) نجد أنه لكل $0 \le i \le m$ توجد كثيرة حدود $T_i(x)$ بحيث $P_i(x)=(x-\alpha)^{r-i}T_i(x)$ و $T_i(\alpha)\neq 0$. وبالتالي فإن $P_i(\alpha)=0$ لكل $0 \le i \le m$. □

لقد وصلنا الآن إلى وضع مناسب لتقديم المبرهنة التي تعطي الحل العام للعلاقة الارتدادية مهما كانت جذورها المميزة.

مبرهنة(٤,٥)

لتكن $u_n + c_1 u_{n-1} + \ldots + c_k u_{n-k} = 0$ علاقة ارتدادية خطية ذات معاملات ثابتة ومن الرتبة k، وجذورها المميزة المختلفة $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ لها التكرارات $r_1,r_2,\ldots,r_s$ على الترتيب. عندئذٍ، لكل مجموعة من الثوابت $c_{1,1},c_{1,2},\ldots,c_{1,r_1},\ldots,c_{s,1},c_{s,2},\ldots,c_{s,r_s}$ يكون

$$u_n=\sum_{i=1}^{s}\left(c_{i,1}+c_{i,2}n+c_{i,3}n^2+\cdots+c_{i,r_i}n^{r_i-1}\right)\alpha_i^n \ \ldots\ldots\ldots (*)$$

حلاً للعلاقة الارتدادية. ولكل حل للعلاقة الارتدادية، توجد ثوابت $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,r_1}, \dots, c_{s,1}, c_{s,2}, \dots, c_{s,r_s}$ بحيث يمكن كتابة الحل على الشكل (*). وتسمى العبارة المعطاة في (*) **بالحل العام** للعلاقة الارتدادية.

البرهان

ينتج من مبرهنة(٤,٤) ومبدأ التراكب أن العبارة المعطاة في (*) حل للعلاقة الارتدادية.

الآن، نفرض أن $u_n = b_n$ حل للعلاقة الارتدادية ونبحث عن ثوابت $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,r_1}, \dots, c_{s,1}, c_{s,2}, \dots, c_{s,r_s}$ بحيث يكون $u_n = \sum_{i=1}^{s} \left(c_{i,1} + c_{i,2}n + c_{i,3}n^2 + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}\right)\alpha_i^n$ حلاً يحقق الشروط الابتدائية $u_0 = b_0, \dots, u_{k-1} = b_{k-1}$. باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$\sum_{i=1}^{s} c_{i,1} = b_0$$

$$\sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + c_{i,2} + \cdots + c_{i,r_i})\alpha_i = b_1$$

$$\sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + c_{i,2}2 + \cdots + c_{i,r_i} 2^{r_i - 1})\alpha_i^{\,2} = b_2$$

....

$$\sum_{i=1}^{s} [c_{i,1} + c_{i,2}(k-1) + \cdots + c_{i,r_i}(k-1)^{r_i - 1}]\alpha_i^{\,k-1} = b_{k-1}$$

وإذا كانت A هي مصفوفة المعاملات لهذا النظام من المعادلات الخطية، فإن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ \alpha_1^{\ 2} & 2\alpha_1^{\ 2} & \cdots & 2^{r_1-1}\alpha_1^{\ 2} & \alpha_2^{\ 2} & \cdots & 2^{r_s-1}\alpha_s^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{\ k-1} & (k-1)\alpha_1^{\ k-1} & \cdots & (k-1)^{r_1-1}\alpha_1^{\ k-1} & \alpha_2^{\ k-1} & \cdots & (k-1)^{r_s-1}\alpha_s^{\ k-1} \end{bmatrix}$$

وكما في إثبات مبرهنة(٤،٣) يكفي إثبات أن $\det(A)\neq 0$. وهذا يكافئ إثبات أن صفوف A تكون مجموعة متجهات مستقلة خطياً. وبهدف الحصول على تناقض، نفرض أن صفوف A تكون مجموعة متجهات مرتبطة خطياً. لكل $0\le i\le k-1$ ضع

$$V_i=(\alpha_1^i, i\alpha_1^i, \ldots, i^{r_1-1}\alpha_1^i, \cdots, \alpha_s^i, i\alpha_s^i, \ldots, i^{r_s-1}\alpha_s^i)$$

بما أن $\{V_0, V_1, \ldots, V_{k-1}\}$ مجموعة متجهات مرتبطة خطياً، فإنه توجد ثوابت $d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$ ليست جميعها أصفاراً بحيث $d_0V_0+d_1V_1+\ldots+d_{k-1}V_{k-1}=0$.

وللاختصار ضع $V=d_0V_0+d_1V_1+\ldots+d_{k-1}V_{k-1}$. ليكن $Q(x)=\sum_{i=0}^{k-1} d_i x_i$ ،

وليكن D مؤثراً بحيث $D^i f(x)=D[D^{i-1}f(x)], i\ge 2$ ؛ $Df(x)=x\dfrac{d}{dx}[f(x)]$

نلاحظ أن

$$\begin{aligned} V=\sum_{i=0}^{k-1} d_iV_i &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i(\alpha_1^i, i\alpha_1^i, \ldots, i^{r_1-1}\alpha_1^i, \cdots, \alpha_s^i, i\alpha_s^i, \ldots, i^{r_s-1}\alpha_s^i) \\ &= (\sum_{i=0}^{k-1} d_i\alpha_1^i, \sum_{i=0}^{k-1} d_i i\alpha_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} d_i i^{r_1-1}\alpha_1^i, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} d_i i^{r_s-1}\alpha_s^i) \\ &= (Q(\alpha_1), DQ(\alpha_1), \ldots, D^{r_1-1}Q(\alpha_1), \ldots, D^{r_s-1}Q(\alpha_s)) \end{aligned}$$

ومن $V=\underline{0}$ ينتج أن

$$Q(\alpha_1)=DQ(\alpha_1)=\cdots=D^{r_1-1}Q(\alpha_1)=\cdots=D^{r_s-1}Q(\alpha_s)=0$$

إذن لكل $1 \le i \le s$ فإن α_i جذر لكثيرة الحدود $Q(x)$ تكراره r_i على الأقل.
وبالتالي، درجة $Q(x)$ أكبر من أو تساوي $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = k$. وهذا يناقض أن درجة $Q(x)$ أصغر من أو تساوي $k-1$.

مثال(٤,٤)

أوجد حل المسألة التالية: $u_n - 7u_{n-1} + 16u_{n-2} - 12u_{n-3} = 0$ حيث $u_0 = 1,\ u_1 = 2, u_2 = 0$.

الحل

المعادلة المميزة هي $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$ وبالتحليل نجد أن $(x-2)^2(x-3) = 0$.
إذن، 2 جذر مميز تكراره 2 و 3 جذر مميز بسيط (أي، تكراره 1). وبالتالي فإن الحل العام هو $u_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 3^n$. باستخدام الشروط الابتدائية نحصل على

$$c_1 + c_3 = 1$$

$$2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 2$$

$$4c_1 + 8c_2 + 9c_3 = 0$$

وبحل نظام المعادلات نجد أن $c_1 = 5,\ ,c_2 = 2,\ c_3 = -4$. إذن، $u_n = 5(2^n) + n2^{n+1} - 4(3^n)$ هو الحل المطلوب.

(٤,٣) العلاقات الارتدادية غير المتجانسة

يتضح من المبرهنة التالية أن حل العلاقات الارتدادية غير المتجانسة وثيق الصلة بحل المعادلات الارتدادية المتجانسة.

مبرهنة(٤,٦)

لتكن

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = f(n) \quad .... (*)$$

علاقة ارتدادية ذات معاملات ثابتة من الرتبة k. ليكن $u_n^{(h)} = \sum_{i=1}^{s} (c_{i,1} + \cdots + c_{i,r_i} n^{r_i - 1}) \alpha_i^n$ هو الحل العام للجزء المتجانس من (*) ، أي الحل العام لـ $u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = 0$. عندئذ، إذا كان $u_n = u_n^{(p)}$ أي حل خاص لـ (*) ، فإن $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ حل لـ (*) . وإذا كان $u_n = a_n$ أي حل لـ (*) ، فإنه يوجد ثوابت $c_{1,1}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يمكن كتابة a_n على الشكل $a_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$. ويسمى $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ **حلاً عاماً** لِ (*) .

البرهان

ينتج من مبدأ التراكب أن $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ حل للعلاقة الارتدادية (*) .

الآن، نفرض أن $u_n = a_n$ حل لِ (*) ونبحث عن ثوابت $c_{1,1}, \ldots, c_{s,r_s}$ بحيث يكون $a_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$. سنثبت أولاً أن $u_n = a_n - u_n^{(p)}$ حل للعلاقة الارتدادية

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} = 0 \quad .... (**)$$

بالتعويض في الطرف الأيسر لـ (**) نجد أن

$$u_n + c_1 u_{n-1} + \cdots + c_k u_{n-k} =$$

$$a_n - u_n^{(p)} + c_1 (a_{n-1} - u_{n-1}^{(p)}) + \cdots + c_k (a_{n-k} - u_{n-k}^{(p)}) =$$

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} - (u_n^{(p)} + u_{n-1}^{(p)} + \cdots + u_{n-k}^{(p)}) =$$

$$f(n) - f(n) = 0$$

إذن، $u_n = a_n - u_n^{(p)}$ حـل لــ $(**)$. وبالتـالي، توجـد ثوابـت $c_{1,1},\ldots,c_{s,r_s}$ بحيث يكون

$$u_n = a_n - u_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{s}(c_{i,1} + \cdots + c_{i,r_i}n^{r_i-1})\alpha_i^n$$

إذن، $a_n = \sum_{i=1}^{s}(c_{i,1} + \cdots + c_{i,r_i}n^{r_i-1})\alpha_i^n + u_n^{(p)}$ كما هو مطلوب. □

يعتمد إيجاد حل خاص للعلاقة الارتدادية

$$u_n + c_1u_{n-1} + \cdots + c_ku_{n-k} = f(n) \text{ .... } (1)$$

على $f(n)$ ؛ ولذلك لا توجد طريقة عامة تعطينا حلولاً خاصة في جميع الأحـوال. سنكتفي بإعطاء إرشادات للبحث عن حلول خاصة لــ (1) عنـدما تكـون $f(n)$ في شكل معين، وسنتبع ذلك ببعض الأمثلة التي توضح تلك الإرشادات.

(أ) إذا كانـت $f(n) = b_0 + b_1n + \cdots + b_tn^t$ حيـث $b_0, b_1, \ldots, b_t$ ثوابـت وكـان العدد 1 ليس جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) فيمكن البحث عن حل خـاص لــ (1) على الشكل $u_n^{(p)} = e_0 + e_1n + \cdots + e_tn^t$ حيث $e_0, e_1, \ldots, e_t$ ثوابت.

(ب) إذا كانـت $f(n) = b_0 + b_1n + \cdots + b_tn^t$ حيـث $b_0, b_1, \ldots, b_t$ ثوابـت وكـان العدد 1 جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) تكراره r فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)} = n^r(e_0 + e_1n + \cdots + e_tn^t)$ حيث $e_0, e_1, \ldots, e_t$ ثوابت.

(ج) إذا كانـت $f(n) = (b_0 + b_1n + \cdots + b_tn^t)\beta^n$ حيـث $b_0, b_1, \ldots, b_t$ ثوابـت و $\beta \neq 1$ وكان العدد β ليس جذراً مميزاً للجزء المتجـانس مـن (1) فـيمكن البحـث عـن حـل خــاص لـــ (1) علــى الــشكل $u_n^{(p)} = (e_0 + e_1n + \cdots + e_tn^t)\beta^n$ حيــث $e_0, e_1, \ldots, e_t$ ثوابت.

(د) إذا كانت $f(n)=(b_0+b_1n+\cdots+b_tn^t)\,\beta^n$ حيث $b_0,b_1,\ldots,b_t$ ثوابت و $\beta\neq 1$ وكان العدد β جذراً مميزاً للجزء المتجانس من (1) تكراره r فيمكن البحث عن حل خاص لـ (1) على الشكل $u_n^{(p)}=n^r(e_0+e_1n+\cdots+e_tn^t)\,\beta^n$ حيث $e_0,e_1,\ldots,e_t$ ثوابت.

يمكن استخدام مبدأ التراكب للبحث عن حل خاص لـ (1) عندما تكون $f(n)$ على الشكل $f(n)=d_1f_1(n)+\cdots+d_if_i(n)$ حيث $d_1,d_2,\ldots,d_i$ ثوابت وكل من $f_1(n),f_2(n),\ldots,f_i(n)$ على شكل $f(n)$ في الفقرة (أ) أو (ب) أو (ج) أو (د) أعلاه. الأمثلة التالية توضح تلك الحالات المختلفة.

مثال(٤,٥)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n+3a_{n-1}=4n^2-2n$ حيث $a_0=-4$.

الحل

نجد بسهولة أن $a_n^{(h)}=c(-3)^n$ حيث c ثابت اختياري. وبما أن 1 ليس جذراً مميزاً، فإنه يمكن الفرض أن $a_n^{(p)}=c_0+c_1n+c_2n^2$ حل خاص. وبالتعويض نحصل على

$$(c_0+c_1n+c_2n^2)+3[c_0+c_1(n-1)+c_2(n-1)^2=4n^2-2n$$

وبمقارنة المعاملات في الطرفين نحصل على نظام المعادلات الخطية التالي:

$$4c_0-3c_1+3c_2=0$$

$$4c_1-6c_2=-2$$

$$4c_2=4$$

وبحـــل هـــذا النظـــام نجـــد أن $c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 1$. إذن، $a_n^{(p)} = n + n^2$.
وبالتالي فإن $a_n = c(-3)^n + n + n^2$. الآن، نـستخدم الـشرط الابتـدائي $a_0 = -4$
فنجد أن $c = -4$. إذن، $a_n = -4(-3)^n + n + n^2$ هو الحل المطلوب.

مثال(٤,٦)

أوجد حل المسألة التالية : $a_n - a_{n-1} = n$ حيث $a_0 = 1$.

الحل

واضح أن $a_n^{(h)} = c$ حيث c ثابت اختياري. وبما أن 1 جذر مميز تكراره 1 ، فإننا نفرض أن $a_n^{(p)} = n(c_0 + c_1 n) = c_0 n + c_1 n^2$ حل خاص. وبالتعويض نجد أن

$$(c_0 n + c_1 n^2) - [c_0(n-1) + c_1(n-1)^2] = n$$

وبمقارنة المعاملات نحصل على

$$c_0 - c_1 = 0$$

$$2c_1 = 1$$

إذن، $c_0 = \frac{1}{2},\ c_1 = \frac{1}{2}$. وبالتالي فإن $a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$.
إذن، $a_n = c + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$. وباســتخدام الــشرط $a_0 = 1$ نجـــد أن $c = 1$. إذن $a_n = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$ هو الحل المطلوب.

مثال(٤,٧)

أوجد حلاً خاصاً للعلاقة الارتدادية التالية : $u_n - 7u_{n-1} + 10u_{n-2} = 3^n$

الحل

يوجد للمعادلة المميـزة $x^2 - 7x + 10 = 0$ جـذران: 2 تكـراره 1 و 5 تكـراره 1.
إذن، 3 لـيس جـذراً مميـزاً. وبالتـالي نفـرض أن $u_n^{(p)} = c3^n$ حيـث c ثابـت.
التعويض يعطينا

$c3^n - 7c3^{n-1} + 10(c3^{n-2}) = 3^n$. إذن $9c - 21c + 10c = 9$ ونجد أن $c = -\frac{9}{2}$
وبالتالي فإن $u_n^{(p)} = -\frac{9}{2}3^n$ حل خاص.

مثال(٤,٨)

أوجد حلاً خاصاً للعلاقة الارتدادية التالية: $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$.

الحل

بما أن 2 جذر مميز تكراره 2 فإننا نفرض أن $a_n^{(p)} = cn^2 2^n$ حل خاص.
وبالتعويض نجد أن

$$cn^2 2^n - 4c(n-1)^2 2^{n-1} + 4c(n-2)^2 2^{n-2} = 2^n$$

إذن $cn^2 - 2c(n-1)^2 + c(n-2)^2 = 1$ وتعطينا مقارنة المعاملات المعادلة $-2c + 4c = 1$. إذن $c = \frac{1}{2}$ وبالتالي فإن $a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^2 2^n = n^2 2^{n-1}$ حل خاص.

مثال(٤,٩)

اكتب صيغة حل خاص لكل من العلاقات الارتدادية التالية:

(أ) $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$

(ب) $u_n + u_{n-1} = 3n2^n$

(ج) $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = (n+1)2^n$

الحل

(أ) نجد حلاً خاصاً لـ $a_n + 2a_{n-1} = 2^n$ على الشكل $a_n^{(p)} = c2^n$ لأن 2 ليس جذراً مميزاً، ونجد حلاً خاصاً لـ $a_n + 2a_{n-1} = -n^2$ على الشكل $a_n^{(p)} = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$ لأن 1 ليس جذراً مميزاً؛ ثم نستخدم مبدأ التراكب فنجد أن

$a_n^{(p)} = c2^n + c_0 + c_1 n + c_2 n^2$ هو الحل الخاص المطلوب.

(ب) بما أن 2 ليس جذراً مميزاً فإننا نفرض أن الحل الخاص المطلوب هو $u_n^{(p)} = (c_0 + c_1 n)2^n$.

(ج) بما أن 2 جذر مميز تكراره 2 فإننا نفرض أن الحل الخاص المطلوب هو $u_n^{(p)} = n^2 (c_0 + c_1 n)2^n$.

سنقدم في المثال التالي طريقة يمكن اتباعها لحل العلاقات الارتدادية التي يمكن كتابتها على الشكل $a_n + f(n)a_{n-1} = g(n)$ حيث $f(n) \neq 0$ لكل $n \geq 1$.

مثال(٤,١٠)

أوجد حل المسألة التالية: $a_n - 2na_{n-1} = n,\ n \geq 1$ حيث $a_0 = 2$.

الحل

نبدأ بإيجاد حل للجزء المتجانس $a_n - 2na_{n-1} = 0$ باستخدام التعويض الأمامي أو التعويض الخلفي. نفرض أن $a_n^{(h)} = u_n$ حل للجزء المتجانس بحيث $u_0 = 1$. إذن، $u_n - 2nu_{n-1} = 0$ ؛ أي، $u_n = 2nu_{n-1}$ و $u_0 = 1$. وبالتالي فإن

$$u_n = 2nu_{n-1} = 2n[2(n-1)u_{n-2}]$$
$$= 2^2 n(n-1)u_{n-2} = 2^3 n(n-1)(n-2)u_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$2^n n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)1u_0 = n!2^n$$

والآن نفرض أن الحل المطلوب على الشكل $a_n = u_n v_n$ ، فيكون $a_0 = u_0 v_0$ ؛ إذن $v_0 = 2$. كما يكون

$$a_n - 2na_{n-1} = n,\ n \geq 1$$

$$u_n v_n - 2n u_{n-1} v_{n-1} = n$$

$$u_n v_n - u_n v_{n-1} = n$$

$$v_n - v_{n-1} = \frac{n}{u_n} = \frac{n}{n!2^n}$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{n}{n!2^n}$$

وبالتالي فإن

$$v_n = v_{n-2} + \frac{n-1}{(n-1)!2^{n-1}} + \frac{n}{n!2^n} = v_{n-3} + \frac{n-2}{(n-2)!2^{n-2}} + \frac{n-1}{(n-1)!2^{n-1}} + \frac{n}{n!2^n}$$

$$= \cdots = v_0 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n} = 2 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n}$$

ويكون الحل المطلوب هو

$$a_n = u_n v_n = n!2^n [2 + \frac{1}{1!2} + \frac{2}{2!2^2} + \cdots + \frac{n}{n!2^n}] \quad \square$$

وكما هو معلوم، فإنه يمكن استخدام الدوال المولّدة العادية والدوال المولدة الأسية في حل العلاقات الارتدادية. ونقدم الآن بعض الأمثلة على ذلك.

مثال(٤,١١)

استخدم الدوال المولّدة لحل المسألة التالية $a_n = a_{n-1} + n,\ n \geq 1$ حيث $a_0 = 1$.

الحل

نفرض أن الدالة المولّدة للمتتالية (a_n) هي $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذن

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + n) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$= 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = 1 + x\,f(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}\; x^{n+1}$$

ومن معامل x^n نجد أن $a_n = 1 + \frac{(n+1)n}{2} = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$.

مثال(٤,١٢)

استخدم الدوال المولّدة لحل المسألة التالية: $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1},\; n \geq 1$

حيث $a_0 = 1$.

الحل

نفرض أن الدالة المولّدة للمتتالية (a_n) هي $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. إذن

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1} + 4^{n-1})\,x^n$$
$$= 1 + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(4x)^n = 1 + 2xf(x) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-4x} - 1\right]$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \frac{1-3x}{(1-2x)(1-4x)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-2x)} + \frac{\frac{1}{2}}{1-4x}$$

إذن $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}4^n x^n$. وبحساب معامل x^n نجد أن $a_n=\frac{1}{2}2^n+\frac{1}{2}4^n$.

مثال(٤,١٣)

استخدم الدوال المولّدة الأسية لحل المسألة التالية: $d_n=nd_{n-1}+(-1)^n,\ n\geq 1$ حيث $d_0=1$.

الحل

نفرض أن الدالة المولّدة الأسية للمتتالية (d_n) هي $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n x^n}{n!}$. إذن

$$f(x)=\frac{d_0}{0!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[nd_{n-1}+(-1)^n]x^n$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=1+xf(x)+\left[e^{-x}-1\right]$$

وبالتالي فإن

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!})\right)x^n$$

وبحساب معامل x^n نجد أن $\frac{d_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. إذن $d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

(٤,٤) بناء العلاقات الارتدادية

نختم موضوع العلاقات الارتدادية بإعطاء بعض الأمثلة التي توضح كيفية بنائها.

مثال(٤,١٤)

لتكن $\{0,1\}$ أبجدية ولترمز a_n لعدد الكلمات التي طول كل منها n والتي لا تحتوي على ثلاثة أصفار متعاقبة، أي لا تحتوي على النسق 000. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) وعيّن الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $x_1x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها n ولا تحتوي على النسق 000. إذا كان $x_1 = 1$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ ولا تحتوي على النسق 000. أما إذا كان $x_1 = 0$ فإنه إما أن يكون $x_1x_2 = 01$ أو أن يكون $x_1x_2 = 00$. عندما يكون $x_1x_2 = 01$ فإن $x_3x_4\cdots x_n$ كلمة طولها $n-2$ ولا تحتوي على النسق 000؛ وعندما يكون $x_1x_2 = 00$ فلا بد أن يكون $x_3 = 1$ وبالتالي فإن $x_4x_5\cdots x_n$ تكون كلمة طولها $n-3$ ولا تحتوي على النسق 000. ينتج من النقاش السابق أن $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ لكل $n \geq 3$. ومن جهة ثانية فإن $a_0 = 1$ لأن الكلمة التي طولها صفر، أي الكلمة الخالية، لا تحتوي على النسق 000. وبالمثل فإن $a_1 = 2$ و $a_2 = 4$ لأن جميع الكلمات التي طول كل منها 1 أو 2 لا تحتوي على النسق 000.

مثال(٤,١٥)

لتكن $\{0,1,\ldots,9\}$ أبجدية ولترمز a_n لعدد الكلمات التي طول كل منها n والتي تحتوي على عدد زوجي من الأصفار. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) وعيّن الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $x_1x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها n و تحتوي على عدد زوجي من الأصفار. إذا كان $x_1 \neq 0$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ وتحتوي على عدد زوجي من الأصفار. أما إذا كان $x_1 = 0$ فإن $x_2x_3\cdots x_n$ كلمة طولها $n-1$ وتحتوي على عدد فردي من الأصفار. بما أن عدد الكلمات التي طول كل منها $n-1$ يساوي 10^{n-1} ؛ فنجد أن $a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})$. أي، $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ لكل $n \geq 1$. كذلك، $a_0 = 1$ لان الكلمة الخالية، لا تحتوي على أصفار.

مثال(٤,١٦)

نقول عن مستقيمات في المستوى إنها في وضع عام عندما تتقاطع زوجاً زوجاً وأي ثلاثة منها لا تلتقي في نقطة. لترمز a_n إلى عدد المناطق الناتجة عن n من المستقيمات التي هي في وضع عام في المستوى. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) وعيّن الشروط الابتدائية.

الحل

لتكن $L_1, L_2, \cdots, L_n$ مستقيمات في وضع عام في المستوى ولتكن $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ نقاط تقاطع L_n مع $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ على الترتيب. نلاحظ أن النقاط $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ تقسم L_n إلى n جزءاً. كما نلاحظ أن $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ في وضع عام في المستوى، وكل جزء من أجزاء L_n يقسم منطقة من المناطق المعينة بالمستقيمات $L_1, L_2, \cdots L_{n-1}$ إلى منطقتين. إذن $a_n = a_{n-1} + n$ لكل $n \geq 1$. كذلك، واضح أن $a_0 = 1$.

مثال(٤,١٧)

لترمز d_n إلى عدد التباديل التامة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (d_n) وعين الشروط الابتدائية.

الحل

سنجد ثلاث علاقات ارتدادية مختلفة للمتتالية (d_n).

(أ) واضح أن $d_1 = 0$، $d_2 = 1$. لتكن $X = \{1,2,\ldots,n\}$ حيث $n \geq 3$، وليكن $x_1 x_2 \cdots x_n$ تبديلاً تاماً للمجموعة X. إذن $x_1 \neq 1$، وبالتالي فإن مجموعة التباديل التامة التي فيها $x_1 = 2$، ومجموعة التباديل التامة التي فيها $x_1 = 3$، ...، ومجموعة التباديل التامة التي فيها $x_1 = n$، تكون تجزئة لمجموعة التباديل التامة للمجموعة X. واضح أن كلاً من أجزاء هذه التجزئة يحتوي على العدد نفسه من التباديل التامة للمجموعة X. ليكن a_n هو عدد التباديل التامة للمجموعة X والتي فيها $x_1 = 2$. إذن $d_n = (n-1)\, a_n$. ولحساب a_n فإننا نعتبر مجموعة التباديل التامة التي لها الشكل: $2x_2 x_3 \cdots x_n;\ x_2 \neq 2,\ x_3 \neq 3,\ldots,\ x_n \neq n$

توجد تجزئة لهذه المجموعة إلى جزأين: الأول يتكون من التباديل التامة التي فيها $x_2 = 1$ والثاني يتكون من التباديل التامة التي فيها $x_2 \neq 1$. إن عدد التباديل التامة في الجزء الأول هو d_{n-2} لأنه يساوي عدد التباديل التامة $x_3 x_4 \cdots x_n$ للمجموعة $\{3,4,\ldots,n\}$ التي فيها $x_3 \neq 3,\ x_4 \neq 4,\ldots,\ x_n \neq n$. أما عدد التباديل التامة في الجزء الثاني فهو d_{n-1} لأنه يساوي عدد التباديل التامة $x_2 x_3 \cdots x_n$ للمجموعة $\{1,3,4,\ldots,n\}$ التي فيها

$x_2 \neq 1, x_3 \neq 3, x_4 \neq 4, \ldots, x_n \neq n$. إذن $a_n = d_{n-2} + d_{n-1}$ وبالتـــــالي فـــــإن $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}], \; n \geq 3$. وإذا اصطلحنا على وضع $d_0 = 1$ فإنه يمكن كتابة العلاقة الارتدادية والشروط الابتدائية على الشكل $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}], \; n \geq 2$ حيث $d_0 = 1, \; d_1 = 0$.

(ب) ضع $a_n = d_n - nd_{n-1}$ لكل $n \geq 1$. باستخدام $d_n = (n-1)[d_{n-2} + d_{n-1}]$ نجد أن $a_n = d_n - nd_{n-1} = -1[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}]$. إذن $a_n = -a_{n-1}$ لكـل $n \geq 2$ و $a_1 = -1$ ، وينـــتج أن $a_n = (-1)^n$ لكـــل $n \geq 1$. إذن $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \quad n \geq 1$ حيث $d_0 = 1$.

(ج) ليكن σ تبديلاً للمجموعة $A = \{1,2,\ldots,n\}$ ولـتكن $B = \{x \in A : \sigma(x) \neq x\}$. إذن σ تعطينا تبديلاً تاماً للمجموعة B التي هي مجموعة جزئية من A . ونصطلح على أن σ تعطينا التبديل التام الوحيد للمجوعة الخالية عندما تكون $B = \phi$. وبالتالي يمكن تعريف تباديل المجموعة $A = \{1,2,\ldots,n\}$ كما يلي: نختار مجموعة جزئيـة $B \subseteq A$ ثـم نختـار تبـديلاً تامـاً τ للمجموعـة B ثـم نعـرّف تبـديلاً σ للمجموعة A بوضـع $\sigma(x) = \tau(x)$ لكـل $x \in B$ و $\sigma(x) = x$ لكـل $x \notin B$. وإذا كان $|B| = k$ فإن عدد طرق اختيار B يساوي $\binom{n}{k}$. إذن، بحساب عـدد تباديـل A مباشـرة وعـن طريـق التباديـل التامـة للمجموعـات الجزئيـة مـن A نجـد أن

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n! \, .$$

وبالتالي فإن $d_n = n! - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_k , \; n \geq 1$ حيث $d_0 = 1$. □

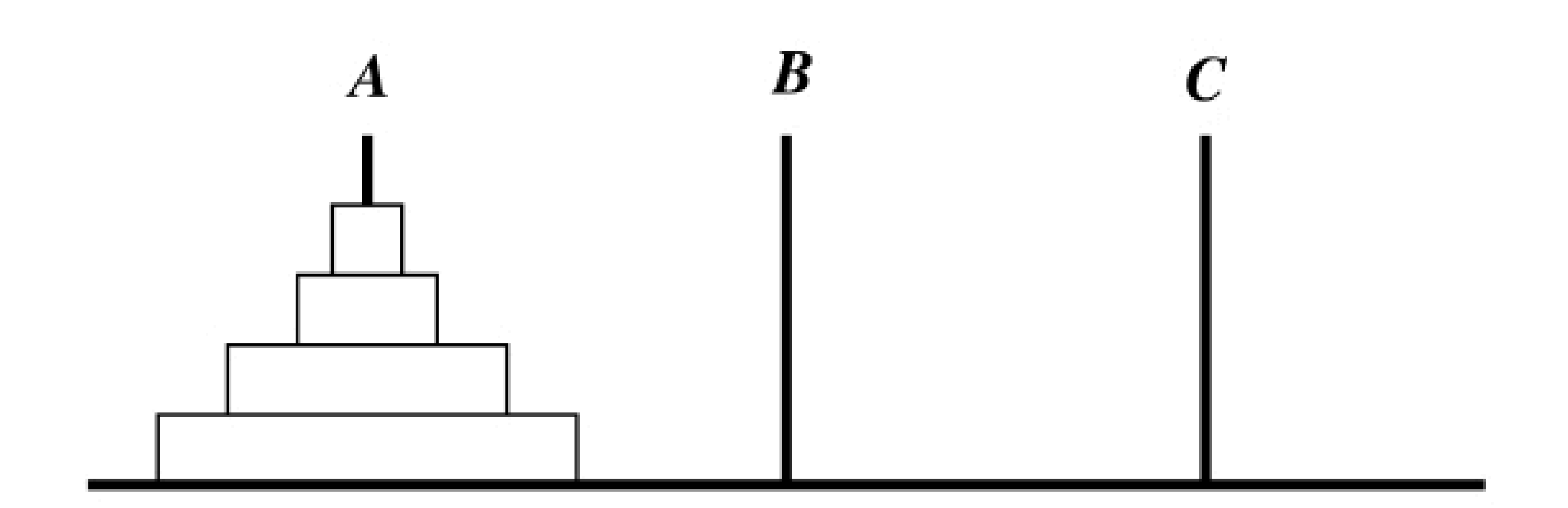
نقدم الآن المسألة المعروفة بأحجية أبراج هانوي.

مثال(٤,١٨)

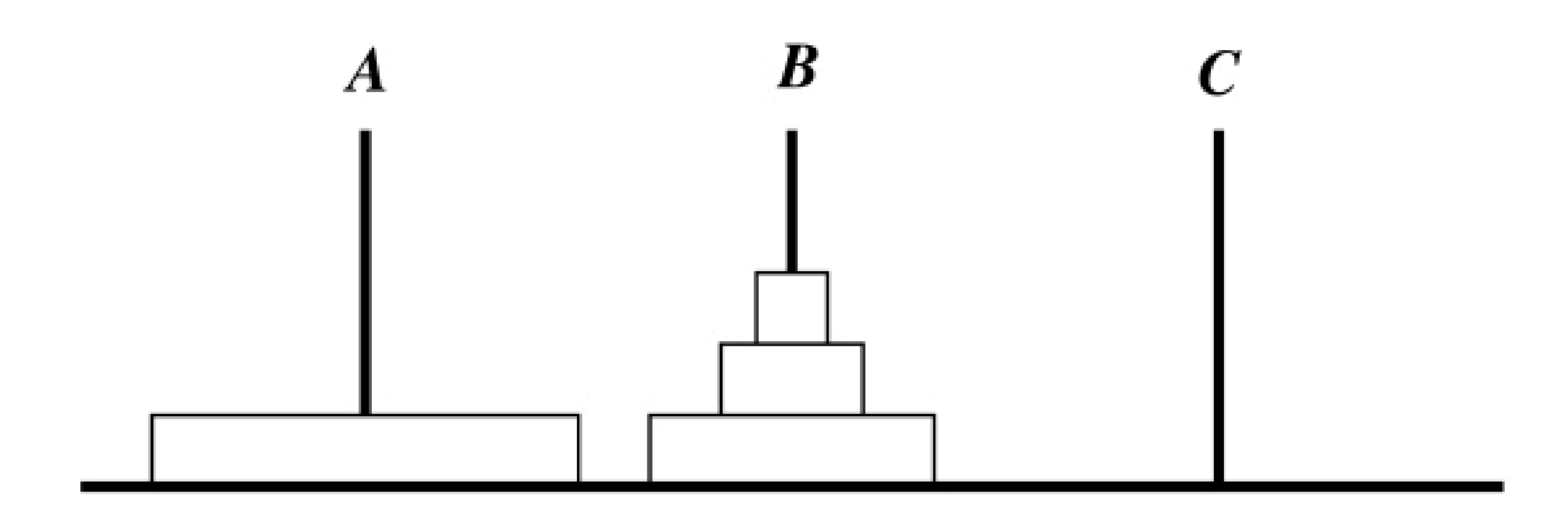
توجد ثلاثة أوتاد رأسية A,B,C على لوحة أفقية. ويوجد n من الأقراص المثقوبة حول مراكزها، وهذه الأقراص مختلفة من حيث الأقطار ومرتبة على الوتد A بحيث تتناقص أطوال أقطار الأقراص من أسفل إلى أعلى. نريد نقل الأقراص إلى الوتد C شرط أن نحمل في النقلة الواحدة قرصاً واحداً وشرط أن لا نضع قرصاً فوق آخر إذا كان الأول أكبر من الثاني قطراً وشرط أن نستخدم الأوتاد A,B,C فقط. المطلوب إيجاد المتتالية (a_n) حيث a_n ترمز إلى أصغر عدد ممكن من النقلات التي تفي بغرضنا عندما يكون عدد الأقراص يساوي n.

الحل

يبين الشكل التالي أن n من الأقراص المختلفة مرتبة على الوتد A بينما الوتدان B و C خاليان من الأقراص.



أولاً، ننقل جميع الأقراص ما عدا القرص الأكبر من الوتد A إلى الوتد B. وبالطبع فإن القرص الأكبر يترك ثابتاً في مكانه أثناء إجراء عمليات النقل. إن عدد النقلات الأمثل لإنجاز المهمة السابقة يساوي a_{n-1}. ويبين الشكل التالي الأقراص في الوضع الجديد.



الآن، ننقل القرص الأكبر من الوتد A إلى الوتد C وننجز هذه المهمة بنقلة واحدة. ثم ننقل الأقراص الأخرى من الوتد B إلى الوتد C، وننجز هذه المهمة بعدد من النقلات يساوي a_{n-1}. ويمكن برهان أن الخوارزمية السابقة هي الخوارزمية المثلى لنقل جميع الأقراص من الوتد A إلى الوتد C. إذن $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$، وبالتالي فإن $a_n = 2a_{n-1} + 1$ لكل $n \geq 2$. كذلك $a_1 = 1$؛ وإذا اصطلحنا على أن $a_0 = 0$ فيكون

$a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geq 1$ حيث $a_0 = 0$.

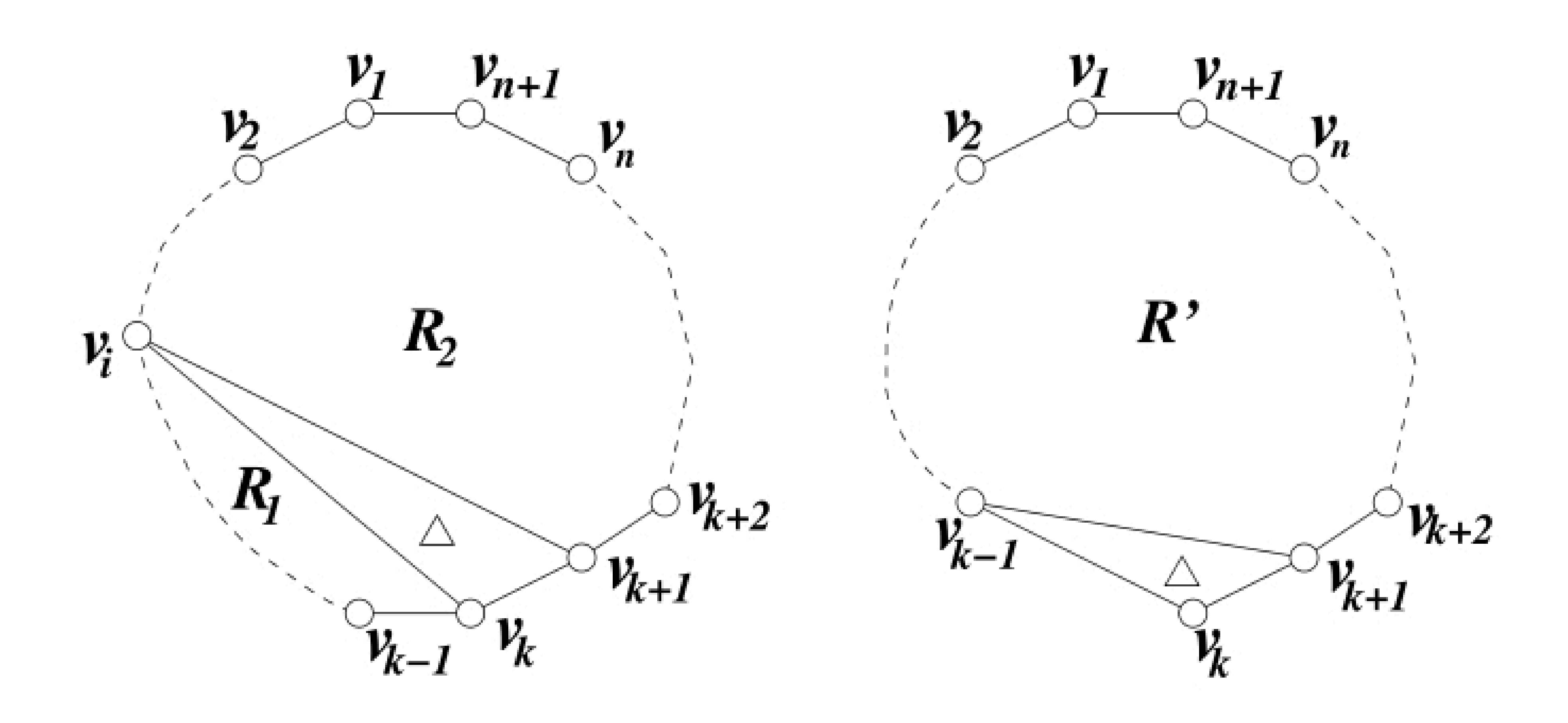
تظهر أعداد كتلان Catalan numbers في كثير من مسائل العد. ولتقديم هذه الأعداد فإننا نختار مقاربة هندسية. إذا كانت لدينا منطقة مضلعة محدبة، وقسمناها إلى مناطق مثلثة مستخدمين أقطاراً غير متقاطعة زوجاً زوجاً داخلها، فإننا نسمي مجموعة المناطق المثلثة **مثالثة** Triangulation للمنطقة المضلعة.

مثال(٤,١٩)

لكل عدد صحيح $n \geq 2$، لترمز t_n إلى عدد مثالثات منطقة مضلعة محدبة عدد أضلاعها $n+1$. ولنعرف $t_0 = 0, t_1 = 1$. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (t_n)، ثم أوجد صيغة جبرية مختصرة للحد العام t_n.

الحل

نجد بسهولة أن $t_2 = 1$. نفرض الآن أن $n \geq 3$ ، ولتكن R منطقة محدبة عدد أضلاعها $n+1$ ورؤوسها النقاط $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ كما يوضح الشكل التالي:



نختار ضلعاً $[v_k v_{k+1}]$، مثلاً، ونثبته. إذا كانت T مثالثة للمنطقة R ، فإن $[v_k v_{k+1}]$ يكون ضلعاً لمنطقة مثلثة Δ من مناطق T ويكون أحد الرؤوس $v_i, i \neq k, i \neq k+1$ رأساً لـ Δ. واضح أن Δ تقسم المنطقة المتبقية من R إلى منطقتين مضلعتين محدبتين R_1 و R_2 عندما يكون $i \neq k+2$ و $i \neq k-1$. أما إذا كان $i = k+2$ أو $i = k-1$ فإن R تنقسم إلى Δ وإلى منطقة مضلعة محدبة أخرى R'. ومن هنا فإن عدد أضلاع R_1 يساوي $j+1$ وعدد أضلاع R_2 يساوي $n-j+1$ حيث j يساوي أحد الأعداد $2,3,\ldots,n-2$ ، وعدد أضلاع R' يساوي n. واضح أن T تعطينا مثالثات لكل من R' و R_2 و R_1 ، وإذا كان لدينا مثالثات لكل من R' و R_2 و R_1 ، فإننا نحصل على مثالثة للمنطقة R. وبما أن عدد أضلاع R' و R_2 و R_1 يساوي n و $n-j+1$ و $j+1$ على الترتيب فإن عدد مثالثات R' و R_2 و

R_1 يساوي t_{n-1} و t_{n-j} و t_j على الترتيب. وبالتالي، عدد مثالثات R يساوي $t_j t_{n-j}$ عندما يكون $i \neq k+2$ و $i \neq k-1$ ؛ كما أن عدد مثالثات R يساوي t_{n-1} عندما يكون $i = k+2$ أو $i = k-1$. إذن، t_n ، أي عدد مثالثات R ، يحقق العلاقة $t_n = t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + t_3 t_{n-3} + \cdots + t_{n-2} t_2 + t_{n-1}$ لكل $n \geq 3$. وبما أن $t_0 = 0, t_1 = 1$ فإن t_n تحقق لكل $n \geq 3$ العلاقة

$$t_n = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + \cdots + t_{n-2} t_2 + t_{n-1} t_1 + t_n t_0 \;...............(*)$$

ولما كانت $t_2 = 1$ فإن (*) تتحقق لكل $n \geq 2$. ونخلص إلى أن المتتالية (t_n) تحقق

$$t_n = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + t_2 t_{n-2} + \cdots + t_n t_0 \,,\; n \geq 2$$

$$t_0 = 0,\, t_1 = 1$$

ولإيجاد t_n نستخدم طريقة الدوال المولدة. في الحقيقة ، لتكن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ هي الدالة المولدة للمتتالية (t_n). عندئذٍ،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n = t_0 + t_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} t_n x^n = t_0 + t_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \cdots + t_n t_0) x^n$$

$$= t_0 + t_1 x + f(x) f(x) + t_0 t_0 - (t_0 t_1 + t_1 t_0) x = x + (f(x))^2$$

إذن $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$

ومنه $f(x) = \dfrac{1 \mp \sqrt{1-4x}}{2}$ وبما أن $f(0) = t_0 = 0$ ، فإن $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$.

والآن نجد مفكوك $f(x)$ باستخدام متسلسلة ذات الحدين كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n4^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{-2n+3}{2})}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{1.2.3\cdots(2n-3)(2n-2)}{2.4.6\cdots(2n-2)}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!2^{n-1}}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

إذن $t_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ **لكل** $n\geq 1$. **وتسمى المتتالية** (c_n) **، حيث**

$c_n=t_{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ **لكل** $n\geq 0$ **، متتالية أعداد كتلان.**

تمارين

١- تسمى الكلمات التي حروفها من الأبجدية $\{0,1\}$ كلمات ثنائية. لترمز a_n إلى عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n والتي تحتوي على النسق 00. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٢- لترمز b_n إلى عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n والتي تحتوي على النسق 000. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (b_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٣- لتكن $A = \{1,2,\ldots,n\}$ عندما $n > 0$ و $A = \phi$ عندما $n = 0$. ولترمز a_n إلى عدد المجموعات الجزئية من A التي لا تحتوي على عددين صحيحين متعاقبين. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٤- تسمى الكلمة التي حروفها من الأبجدية $\{0,1,2,3\}$ كلمة رباعية. لترمز a_n إلى عدد الكلمات الرباعية التي طول كل منها n والتي تحتوي على عدد زوجي من الحرف 0. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

٥- لترمز a_n إلى عدد الكلمات الرباعية التي طول كل منها n والتي تحتوي على عدد زوجي من الحرف 0 وعدد زوجي من الحرف 3. أوجد نظاماً من العلاقات الارتدادية يربط (a_n) بأمثالها من المتتاليات المعرفة بناءً على زوجية أو فردية تكرار الحروف في كلماتها. أوجد الشروط الابتدائية.

٦- (أ) أوجد الحل لتمرين (١) بعد استبدال (تحتوي) بِـ (لا تحتوي).

(ب) أوجد علاقة بين المتتالية (a_n) المعطاة في (أ) ومتتالية فيبوناتشي (b_n).

(ج) استند إلى (ب) واستخدم عدد الكلمات الثنائية التي طول كل منها n والتي تكرار الحرف 0 فيها يساوي k لإثبات أن

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1-k}{k}, \quad n \ge 1$$

٧- أوجد الحل لتمرين (٢) بعد استبدال (تحتوي) بـِ (لا تحتوي).

٨- تسمى الكلمة التي حروفها من الأبجدية $\{0,1,2\}$ كلمة ثلاثية. أوجد الحلول للتمارين (١)، (٢)، (٦أ)، (٧) عندما تكون الكلمات ثلاثية.

٩- يقال عن مجموعة الدوائر إنها في وضع عام في مستوى إذا كانت تقع في المستوى بحيث تتقاطع زوجاً زوجاً في نقطتين ولا تتقاطع ثلاثاً ثلاثاً في أية نقطة. لترمز a_n إلى عدد المناطق الناشئة عن n من الدوائر التي هي في وضع عام في المستوى. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٠- أوجد الحل لمسألة أبراج هانوي عندما يكون عدد الأوتاد أربعة.

١١- أوجد الحل للتمرين (٥) عندما تكون الكلمات ثنائية.

١٢- أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل عندما يكون

(أ) $a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

(ب) $a_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1)$

(ج) $a_n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$

١٣- تسمى دائرة على سطح كروي دائرة كبرى إذا كان مركزها هو مركز الكرة نفسه. لترمز a_n إلى عدد المناطق على السطح الكروي الناتجة عن n من الدوائر الكبرى التي لا تتقاطع ثلاثاً ثلاثاً في أية نقطة. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٤- لترمز a_n إلى عدد تباديل المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ التي يجعل كل منها كل عدد في موضعه الطبيعي أو في الموضع الذي يسبق مباشرة موضعه الطبيعي أو في الموضع الذي يلي مباشرة موضعه الطبيعي. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٥- يستطيع روبت (أي، إنسان آلي) أن يتحرك إلى الأمام بخطوات كل منها متر أو متران. لترمز a_n إلى عدد الطرق التي يقطع بها هذا الروبت مساراً طوله n متراً. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n) ، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٦- إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و $A^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$ فأوجد علاقات ارتدادية تربط بين المتتاليات (a_n) ، (b_n) ، (c_n) ، (d_n) واستخدم تلك العلاقات لحساب A^{100} .

١٧- لتكن $B_n=\{1,2,\ldots,n\}$ ، ولتكن $a_n=|A_n|$ حيث $A_n=\{(a,b,c)\in B_n\times B_n\times B_n : a<b<c, b-a=c-b\}$. أثبت أن $a_{2n+1}=a_{2n}+n$ وأوجد علاقة مشابهة تربط بين a_{2n} و a_{2n-1} ، ثم أثبت أن المتتالية (a_n) تحقق العلاقة $a_n=a_{n-2}+n-2$. أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٨- لتكن المصفوفة $A_n=[a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $n\times n$ بحيث كل عنصر قطري فيها يساوي 2 وكل عنصر يقع فوق أو تحت القطر مباشرة يساوي 1 بينما كل عنصر آخر يساوي صفراً. إذا كانت $d_n=\det(A_n)$ ، فأوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (d_n) ، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل.

١٩- لدينا $2n$ نقطة $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ موزعة على محيط دائرة بحيث تكون رؤوس مضلع منتظم. لترمز a_n إلى عدد تجزئات المجموعة $\{P_1, P_2, \ldots, P_{2n}\}$ إلى أزواج بحيث لا تتقاطع الأوتار المعينة بأزواج التجزئة زوجاً زوجاً. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل وقارنه بأعداد كتلان.

٢٠- لترمز a_n إلى عدد تجزئات المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ بحيث تكون أجزاء التجزئة أزواجاً أو مجموعات أحادية. أوجد علاقة ارتدادية للمتتالية (a_n)، أوجد الشروط الابتدائية، ثم أوجد الحل مستخدماً طريقة الدوال المولدة الأسية.

٢١- أوجد الحل العام لكل من العلاقات الارتدادية التالية؛ وإذا كانت الجذور المميزة أعداداً مركبة فاكتب الحل العام معتبراً الثوابت الاختيارية أعداداً مركبة.

(أ) $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$

(ب) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

(ج) $a_n + 3a_{n-2} = 0$

(د) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

(هـ) $a_n + 10a_{n-1} + 32a_{n-2} + 32a_{n-3} = 0$

(و) $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0$

(ز) $4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$

(ح) $a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0$

(ط) $a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3} + 3a_{n-4} - a_{n-5} = 0$

٢٢- أوجد حل كل من المسائل التالية ، وإذا كانت الجذور المميزة أعداداً مركبة فاستخدم الصيغة المثلثية للأعداد المركبة لكتابة الحل في شكل بسيط.

(أ) $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 0,\ a_1 = 3$.

(ب) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1,\ a_1 = 6$.

(ج) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 0,\ a_1 = 2$.

(د) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1,\ a_1 = 1$.

(هـ) $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} = 0$ حيث $a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1$.

(و) $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1,\ a_1 = 2$.

(ز) $a_n - 2\cos(\alpha)a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1,\ a_1 = \cos(\alpha)$.

(ح) $a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$ حيث

$a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 15$.

(ط) $a_n - a_{n-4} = 0$ حيث $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1$.

(ي) $a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$ حيث

$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0$.

(ك) $a_n - 2a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 2,\ a_1 = 0$.

(ل) $a_n + a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 0,\ a_1 = 3$.

(م) $a_n + 4a_{n-2} = 0$ حيث $a_0 = 1,\ a_1 = 1$.

(ن) $a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0$ حيث $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$.

٢٣- أوجد حلاً خاصاً لكل من العلاقات الارتدادية التالية

(أ) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n + 2$

(ب) $a_n + 3a_{n-1} = 4^n$

(ج) $a_n - a_{n-1} = 2n^2 - n - 1$

(د) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n + 2^n$

(هـ) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (-2)^n$

(و) $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = n - 2$

(ز) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27(5^n)$

(ح) $4a_{n+2} - a_n = 3\cos(n\frac{\pi}{2})$ [إرشاد: ضع $a_n^{(p)} = c_1\cos(n\frac{\pi}{2}) + c_2\sin(n\frac{\pi}{2})$]

٢٤- أوجد الحل لكل من المسائل التالية:

(أ) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(ب) $a_n - 2a_{n-1} = n^2$ **حيث** $a_0 = 1$.

(ج) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 2$.

(د) $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5(2^{n+1})$ **حيث** $a_0 = 2, a_1 = -1$.

(هـ) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 0$.

(و) $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$ **حيث** $a_0 = 1$.

(ز) $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ **حيث** $a_0 = 2$.

(ح) $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 8(3^{n-2}) + 3(2^{n-2})$ **حيث** $a_0 = -3, a_1 = -15$.

(ط) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 2^n$ **حيث** $a_0 = 1, a_1 = 2$.

٢٥- أوجد الحل لكل من المسائل التالية:

(أ) $a_n + na_{n-1} = n!$ حيث $a_0 = 1$.

(ب) $a_n - 2na_{n-1} = n$ حيث $a_0 = 2$.

(ج) $a_n - 2^{-n} a_{n-1} = 1$ حيث $a_0 = 1$.

(د) $a_n^3 - 2a_{n-1}^3 = 1$ حيث $a_0 = 1$.

(هـ) $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(و) $a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$ حيث $a_0 = 4$. [إرشاد: ضع $b_n = \log_2 a_n$]

(ز) $na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n$ حيث $a_0 = 273$.

(ح) $a_n - na_{n-1} = n!$ حيث $a_0 = 2$.

٢٦- استخدم الدوال المولدة لحل المسائل التالية:

(أ) $a_n - a_{n-1} = n$ حيث $a_0 = 1$.

(ب) $a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-1}$ حيث $a_0 = 1$.

(ج) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n + n$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(د) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ حيث $a_0 = 0, a_1 = 1$.

(هـ) $a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1},\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ حيث $a_0 = 1, b_0 = 0$.

(و) $a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n,\ b_{n+1} = b_n - c_n + 4^n,\ c_{n+1} = c_n - b_n + 4^n$ حيث $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$.

(ز) $a_{n+1} = 5a_n + 6b_n + 1,\ b_{n+1} = -6a_n - 7b_n - 1$ حيث $a_0 = \frac{3}{2},\ b_0 = \frac{-3}{2}$.

[ملاحظة: الحل ممكن بطريقة الحذف حيث نجد a_{n+2} من العلاقة الأولى ثم نعوض عن b_{n+1} وعن b_n فنحصل على علاقة للمتتالية (a_n) فقط.]

(ح) $a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_na_0 = 2^n a_n$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(ط) $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ حيث $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(ي) $a_n = 2a_{n-1} + \dfrac{2^n}{n}$ حيث $a_0 = 1$.

الفصل الخامس

مبدأ برج الحمام وأعداد رمزي

THE PIGEONHOLE PRINCIPLE AND RAMSEY NUMBERS

(٥,١) مبدأ برج الحمام

إن مبدأ برج الحمام بسيط ولكنه أداة فعّالة عندما نحاول إثبات أنه يوجد حل لمسألة تركيبية. وهذا المبدأ لا يرشدنا إلى كيفية الحصول على حل ولا يعطينا عدد الحلول الممكنة ولكنه يخبرنا أنه يوجد حل، على الأقل، للمسألة المعالجة.

مبرهنة(٥,١) (مبدأ برج الحمام)

إذا وزّعنا m كرة على n صندوقاً وكان $m > n$ ، فإنه يوجد صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ كرة على الأقل.

البرهان

نفرض أن كل صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ كرة على الأكثر. إذن يكون عدد الكرات أصغر من أو يساوي $n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \le n\left(\frac{m-1}{n}\right) = m-1$. وهذا يناقض أن عدد الكرات m. □

هنالك صياغات متعددة لهذا المبدأ، ويمكن التعبير عنه بلغة المجموعات كما يلي:

إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً بحيث $|A| = m, |B| = n, m > n$ وإذا رمزنا للصورة العكسية لأي عنصر $y \in B$ بالرمز $f^{-1}(y)$، فإنه يوجد $b \in B$ بحيث $f^{-1}(b) \geq \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$.

مثال(٥,١)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإن كل مجموعة جزئية $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ عدد عناصرها $n+1$ من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ يجب أن تحتوي على:

(أ) عددين أوليين نسبياً. (ب) عددين يقسم أحدهما الآخر.

الحل

(أ) نكون مجموعة الأزواج $A = \{(1,2), (3,4), \ldots, (2n-1, 2n)\}$. لاحظ أن $|A| = n$. إذن يكون لدينا $n+1$ كرة (الأعداد a_i) نريد توزيعها على n صندوقاً (الأزواج $(j, j+1)$). بتطبيق مبدأ برج الحمام نجد أنه يوجد صندوق يحتوي على كرتين على الأقل، وبالتالي يحتوي على كرتين بالضبط. إذن تحتوي المجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ على عددين متعاقبين $2k-1, 2k$ وهما أوليان نسبياً.

(ب) لكل $1 \leq j \leq n+1$ ليكن $a_j = b_j 2^{i_j}$ حيث b_j عدد فردي، ولتكن $B = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. لاحظ أن $|B| = n$ وأن $b_j \in B$ لكل j. بما أن عدد عناصر $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ يساوي $n+1$ وبما $|B| = n$، فإنه يوجد $k \neq m$ بحيث $b_k = b_m$. وبالتالي فإن $a_m = b_m 2^{i_m} = b_k 2^{i_m}$ وبما أن $a_k = b_k 2^{i_k}$، فإن a_k أو a_m يقسم الآخر.

إذا كان عدد الكرات الموزعة يزيد على عدد الصناديق بواحد، فإنه ينتج من مبدأ برج الحمام أنه يوجد صندوق يحتوي على كرتين على الأقل. المبرهنة التالية تعطينا تعميماً بسيطاً لهذه النتيجة.

مبرهنة(٥,٢)

إذا كانت $m_1, m_2, \ldots, m_n$ أعداداً صحيحة موجبة ووزعنا $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n + 1$ كرة على n صندوقاً، فإنه إما أن يحتوي الصندوق الأول على m_1 كرة على الأقل أو أن يحتوي الصندوق الثاني على m_2 كرة على الأقل، ...، أو أن يحتوي الصندوق رقم n على m_n كرة على الأقل.

البرهان

نفرض أن الصندوق رقم k يحتوي على $m_k - 1$ كرة على الأكثر، لكل $1 \le k \le n$.
إذن يكون عدد الكرات أصغر من أو يساوي
$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_n - 1) = m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n$ وهذا يناقض أن عدد الكرات يساوي $m_1 + m_2 + \ldots + m_n - n + 1$.

مثال(٥,٢)

إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة، فإنه توجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة طولها $n+1$.

الحل

لكل $1 \le i \le n^2 + 1$ نفرض أن t_i يساوي طول أطول متتالية جزئية متزايدة تبدأ بالعدد a_i. إذا كان أي t_i أكبر من أو يساوي $n+1$ فإننا نحصل على المطلوب. لذلك نفرض أن $1 \le t_i \le n$ لكل i. إذن يكون لدينا $n^2 + 1$ كرة (الأعداد t_i) نريد

توزيعها على n صندوقاً (الأعداد $1,2,\ldots,n$). بتطبيق مبدأ برج الحمام نجد أنه يوجد صندوق يحتوي على $\left\lfloor \frac{n^2+1-1}{n} \right\rfloor +1 = n+1$ كرة على الأقل. أي، يوجد على الأقل $n+1$ من الأعداد t_i بحيث تكون متساوية. سنثبت أن الأعداد a_i المصاحبة لهذه الأعداد t_i تكوّن متتالية جزئية متناقصة. نفرض أن $t_i = t_j$ حيث $i < j$. سنثبت أن $a_i > a_j$. إذا كان $a_i \le a_j$، فإن $a_i < a_j$ لأن حدود المتتالية المعطاة مختلفة. إذن المتتالية الجزئية المكونة من a_i متبوعاً بأطول متتالية جزئية تبدأ بالعدد a_j تعطينا متتالية جزئية متزايدة طولها $t_j + 1$. إذن $t_i \ge t_j + 1$، وهذا يناقض الفرض أن $t_i = t_j$.

تمارين (٥,١)

١– نقول إن A نقطة شبكية عندما تكون إحداثياتها أعداداً صحيحة.

(أ) إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_5$ خمس نقاط شبكية مختلفة في المستوى، فأثبت أنه توجد بينها نقطتان بحيث تكون نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصلهما شبكية.

(ب) إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_9$ تسع نقاط شبكية مختلفة في الفضاء $\mathbb{R}^3$، فأثبت أنه توجد بينها نقطتان بحيث تكون نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصلهما شبكية.

٢– أثبت أنه إذا رتبت الأعداد $1,2,\ldots,36$ عشوائيا بشكل دائري، فإنه توجد ثلاثة أعداد متعاقبة يكون مجموعها أكبر من أو يساوي 56.

٣- تم تشغيل جهاز تكييف لمدة 300 ساعة خلال فترة 15 يوماً. أثبت أنه توجد ثلاثة أيام متعاقبة شغل خلالها الجهاز لمدة 60 ساعة على الأقل.

٤- عمل سائق سيارة لمدة 81 ساعة خلال فترة 10 أيام. أثبت أنه يوجد يومان متعاقبان عمل خلالهما السائق لمدة 17 ساعة على الأقل.

٥- لتكن $\sim$ علاقة تكافؤ معرفة على $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ كما يلي: $(a,b)\sim(c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a\equiv c \bmod n$ و $b\equiv d \bmod n$. جد أقل عدد من الأزواج المرتبة بحيث ينتمي زوجان مرتبان على الأقل إلى فصل التكافؤ نفسه.

٦- تتكون الأبجدية الإنجليزية من 21 حرفاً صحيحاً و 5 حروف علّة.

(أ) أثبت أن أي تبديل لحروف هذه الأبجدية يجب أن يحتوي على 4 حروف صحيحة متعاقبة.

(ب) أثبت أن أي توزيع لحروف هذه الأبجدية على محيط دائرة يجب أن يحتوي على 5 حروف صحيحة متعاقبة.

٧- تدرب لاعب شطرنج لمدة 77 يوماً. وكان يلعب مباراة واحدة في اليوم على الأقل، لكنه لم يلعب أكثر من 132 مباراة طوال فترة التدريب. اثبت أنه توجد أيام متعاقبة خاض خلالها اللاعب 21 مباراة بالضبط.

٨- إذا كان $G=(V,E)$ رسماً (بسيطاً منتهياً) بحيث $|V|\geq 2$، فأثبت أنه يوجد رأسان $x,y\in V$ بحيث $\deg(x)=\deg(y)$.

٩- إذا كانت C_{10} دورة في رسم ما، وإذا عنونت رؤوسها عشوائياً بالأعداد $1,2,\ldots,10$، فأثبت أنه توجد 3 رؤوس متعاقبة مجموع عناوينها أكبر من أو يساوي 17.

١٠- إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ نقاطاً في المستوى بحيث $n \geq 2$ ، وإذا كانت أي ثلاث منها غير متسامتة (أي، لا يمر بها مستقيم) وإذا كانت n^2+1 من القطع المستقيمة تصل بين هذه النقاط،فأثبت أن الشكل يحتوي على مثلث. [إرشاد: استخدم الاستقراء الرياضي على n و مبدأ برج الحمام].

١١- إذا صبغت أضلاع الرسم التام K_6 باللونين الأحمر والأزرق، فأثبت أنه توجد دورة ثلاثية بحيث يكون لإضلاعها اللون عينه.

١٢- إذا كان f تبديلاً ينتمي إلى زمرة التناظر $(S_n, \circ)$ ، فأثبت أنه يوجد عددان صحيحان موجبان i, j بحيث $f^i = f^j$ ، ثم استنتج أنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث f^k يساوي التبديل المحايد.

١٣- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أنه يوجد عدد صحيح موجب m يقبل القسمة على n بدون باقٍ ويحتوي تمثيله العشري على الرقمين 7,0 فقط.

١٤- لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_m$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث تحتوي بالضبط على n من الحدود المختلفة. إذا كان $m \geq 2^n$ ، فأثبت أنه توجد متتالية جزئية حدودها متعاقبة في المتتالية الأصلية بحيث يكون حاصل ضرب حدودها مربعاً كاملاً.

١٥- إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد الحقيقية المختلفة، فأثبت أنه إما توجد متتالية جزئية متزايدة طولها $n+1$ أو توجد متتالية جزئية متناقصة طولها $m+1$.

١٦- لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $a_1 < a_2 < \ldots < a_{mn+1}$. أثبت أنه إما توجد متتالية جزئية عدد حدودها $m+1$

بحيث أي حد من حدودها لا يقسم أي حد آخر أو توجد متتالية جزئية عدد حدودها $n+1$ بحيث يقسم كل حد من حدودها الحد الذي يليه.

١٧- مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 2سم. ما هو أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المثلث وعلى أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من 1 سم؟

١٨- مربع طول ضلعه 2سم. ما هو أكبر عدد من النقاط التي يمكن اختيارها من بين النقاط التي تقع داخل المربع وعلى أضلاعه بحيث تكون المسافة بين كل زوج من النقاط المختارة أكبر من $\sqrt{2}$ سم؟

١٩- لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_6\}\subset\mathbb{Z}^+$ مجموعة مؤلفة من 6 أعداد صحيحة موجبة مختلفة بحيث $\max(A)\le 14$. لكل $\phi\subset X\subseteq A$، نجد مجموع الأعداد المنتمية إلى X. أثبت أن الأعداد الناتجة لا يمكن أن تكون مختلفة.

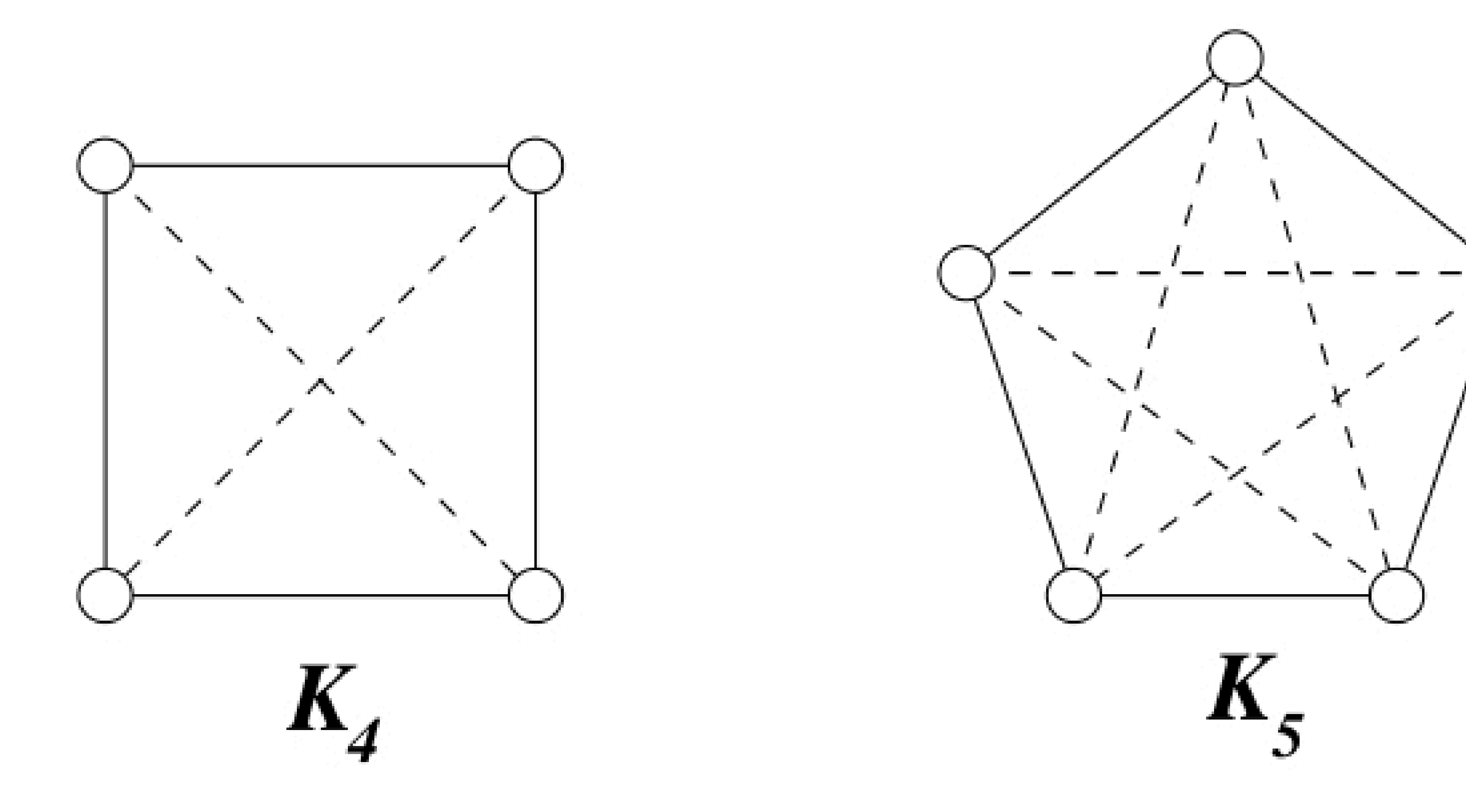
٢٠- لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_5\}\subset\mathbb{Z}^+$ مجموعة مؤلفة من 5 أعداد صحيحة موجبة مختلفة بحيث $\max(A)\le 9$. لكل $\phi\subset X\subseteq A$، نجد مجموع الأعداد المنتمية إلى X. أثبت أن الأعداد الناتجة لا يمكن أن تكون مختلفة.

(٥,٢) أعداد رمزي

إذا صبغت أضلاع الرسم التام K_6 باللونين الأحمر والأزرق، فإنه يمكن استخدام مبدأ برج الحمام لإثبات أنه توجد دورة ثلاثية أحادية اللون. في الحقيقة، نختار أي رأس v في K_6 فيكون $\deg(v)=5$. إذن، لدينا 5 كرات (الأضلاع الساقطة على v) نريد توزيعها على صندوقين (اللونين الأحمر والأزرق). ينتج من

مبدأ برج الحمام أنه يوجد على الأقل $\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ أضلاع أحادية اللون ساقطة على v. أي، توجد ثلاثة أضلاع، ولتكن $\{v,a\},\{v,b\},\{v,c\}$ ، لها اللون نفسه، وليكن الأحمر مثلاً. الآن، إذا كان أحد أضلاع الدورة الثلاثية التي رؤوسها a,b,c مصبوغاً باللون الأحمر فإننا نحصل على مثلث أحمر وإلا فإننا نحصل على مثلث أزرق.

نلاحظ أنه يمكن صبغ أضلاع كل من K_4 و K_5 باللونين الأحمر والأزرق بحيث لا نحصل على مثلث أحادي اللون. على سبيل المثال، إذا مثلنا اللون الأحمر بخط متصل و اللون الأزرق بخط متقطع، فإن كلاً من الرسمين التاليين لا يحتوي على مثلث أحادي اللون.



كما نلاحظ أنه إذا صبغنا أضلاع K_n بلونين، فإنه لكل $n \geq 6$ لا بد أن يحتوي K_n على مثلث أحادي اللون، لأن K_n يحتوي على نسخة من K_6 لكل $n \geq 6$.

مما سبق نستنتج أنه إذا صبغنا أضلاع K_n بلونين، فإن أصغر عدد n يضمن لنا احتواء K_n على مثلث أحادي اللون يساوي 6. ونقول إن العدد 6 له خاصة رمزي من النوع $(3,3)$ والعدد 5 ليس له هذه الخاصة كما نقول إن العدد 6 أحد أعداد رمزي. وأكثر تحديداً نقول إن 6 هو عدد رمزي من النوع $(3,3)$ ونكتب $R(3,3)=6$.

تعريف(٥,١)

لتكن i,j,m أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i \geq 2,\ j \geq 2$. نقول إن m له خاصة رمزي من النوع (i,j) إذا تحقق ما يلي: كلما صبغنا أضلاع K_m باللونين الأحمر والأزرق، فإنه إما أن يحتوي K_m على K_i أحمر اللون أو أن يحتوي K_m على K_j أزرق اللون.

تعريف (٥,٢)

ليكن i,j عددين صحيحين بحيث $i \geq 2,\ j \geq 2$. يسمى أصغر عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع (i,j) بعدد رمزي من النوع (i,j) ويرمز له بالرمز $R(i,j)$.

نهدف الآن إلى إثبات أن العدد $R(i,j)$ موجود لكل $i \geq 2,\ j \geq 2$، وسنصل إلى ذلك عبر النتائج التالية.

تمهيدية(٥,١)

(أ) إذا كان n له خاصة رمزي من النوع (i,j) وكان $m > n$ فإن m له خاصة رمزي من النوع (i,j).

(ب) إذا كان n ليس له خاصة رمزي من النوع (i,j) وكان $m<n$ فإن m ليس له خاصة رمزي من النوع (i,j).

(ج) إذا كان $i \ge k$ ووجد $R(i,j)$، فإن $R(i,j) \ge R(k,j)$.

(د) $R(i,j)=R(j,i)$ كلما وجد $R(i,j)$.

(هـ) $R(2,k)=2$ لكل $k \ge 2$.

البرهان

نترك البرهان كتمرين بسيط للقارئ.

تمهيدية(٥,٢)

إذا كان i,j عددين صحيحين بحيث $i \ge 3,\ j \ge 3$ ووجد $R(i-1,j)$ و $R(i,j-1)$، فإن $R(i,j)$ موجود ويحقق $R(i,j) \le R(i,j-1)+R(i-1,j)$.

البرهان

ضع $n=R(i,j-1)+R(i-1,j)$. يكفي أن نثبت أن n له خاصة رمزي من النوع (i,j). اصبغ كل ضلع في K_n إما باللون الأحمر أو باللون الأزرق، وافرض أن v أحد رؤوس K_n. عرّف مجموعتي الرؤوس المنفصلتين D,F كما يلي: $x \in D$ إذا كان الضلع $\{v,x\}$ أحمر اللون و $x \in F$ إذا كان الضلع $\{v,x\}$ أزرق اللون. وبالتالي فإن

$$|D|+|F|=|D \cup F|=n-1=R(i,j-1)+R(i-1,j)-2+1$$

إذن، بتطبيق مبرهنة(٥,٢)، ينتج أنه إما أن يكون $|D| \ge R(i,j-1)$ أو $|F| \ge R(i-1,j)$. افرض أن $m=|D| \ge R(i,j-1)$ [البرهان مشابه في الحالة الأخرى]. إذن K_m يحتوي على K_i أحمر اللون أو على K_{j-1} أزرق اللون.

ومن $m < n$ ، ينتج أن K_n يحتوي على K_i أحمر اللون أو على K_{j-1} أزرق اللون. في الحالة الثانية، يحتوي K_n على الرسم التام $K_{j-1} + v$ الذي هو أزرق اللون. إذن، n له خاصة رمزي من النوع (i, j). □

إن النتيجة المباشرة لمبرهنة رمزي التالية هي أن عدد رمزي $R(i, j)$ موجود لكل $i \geq 2, j \geq 2$.

مبرهنة(٥,٣)(مبرهنة رمزي)

إذا كان i, j عددين صحيحين بحيث $i \geq 2, j \geq 2$ ، فإنه يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع (i, j).

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على n حيث $n = i + j$. من تمهيدية (٥,١) ينتج أن $R(3,2) = R(2,3) = R(2,2) = 2$ ، وبالتالي فإن المطلوب صحيح عندما $n = 4, n = 5$. الآن نفرض أن المطلوب صحيح عند n ونثبت صحته عند $n+1$. افرض أن $n+1 = i + j$. إذن، $(i-1) + j = n$, $i + (j-1) = n$. من فرضية الاستقراء ينتج أنه يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع $(i-1, j)$ كما يوجد عدد صحيح موجب له خاصة رمزي من النوع $(i, j-1)$. وبالتالي فإن كلاً من $R(i-1, j)$ و $R(i, j-1)$ موجود. الآن، بتطبيق تمهيدية (٥,٢)، نجد أن $R(i, j)$ موجود؛ أي أن المطلوب صحيح عند $n+1$. □

في بداية هذا البند استخدمنا تلوينات أضلاع K_m لتعريف خواص رمزي. ولغرض تعميم وتطوير الأفكار السابقة، فإن تعريف خاصة رمزي من نوع ما يصاغ بلغة المجموعات على النحو التالي.

تعريف (٥,٣)

لتكن i, j, m أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i \geq 2,\ j \geq 2$. نقول إن m له خاصة رمزي من النوع $(i, j; 2)$ إذا تحقق ما يلي: إذا كانت V مجموعة عدد عناصرها m، وكانت $P = \{X, Y\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 2 ؛ فإنه إما أن توجد مجموعة جزئية I من V بحيث عدد عناصر I يساوي i وبحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من I التي عدد عناصر كل منها 2 محتواة في X ، أو أن توجد مجموعة جزئية J من V بحيث عدد عناصر J يساوي j وبحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من J التي عدد عناصر كل منها 2 محتواة في Y.

وبناءً على ما سبق، نرمز لعدد رمزي من النوع $(i, j; 2)$ بالرمز $R(i, j; 2)$.

وبهدف التعميم لتكن $i_1, i_2, \ldots, i_n, k$ أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i_j \geq k,\ n \geq 2$ لكل $1 \leq j \leq n$. نقول إن العدد الصحيح الموجب m له خاصة رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$ إذا تحقق ما يلي: إذا كانت V مجموعة عدد عناصرها m، وكانت $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها k ؛ فإنه يوجد j بحيث توجد مجموعة جزئية I_j من V بحيث عدد عناصر I_j يساوي i_j وبحيث تكون مجموعة المجموعات الجزئية من I_j التي عدد عناصر كل منها k محتواة في X_j. ويرمز لعدد رمزي من النوع $(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$ بالرمز $R(i_1, i_2, \ldots, i_n; k)$. ويمكن العودة إلى المراجع للإطلاع على المراجع التي تبين وجود هذه الأعداد؛ وسنكتفي هنا بعرض الحالة البسيطة التي تجعلنا نلاحظ أن نظرية رمزي تعميم عميق لمبدأ برج الحمام.

مبرهنة (٥,٤)

$$R(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)=i_1+i_2+\cdots+i_n-(n-1)$$

البرهان

ضع $m=i_1+i_2+\cdots+i_n-(n-1)=i_1+i_2+\cdots+i_n-n+1$. سنثبت أولاً أن m له خاصة رمزي من النوع $(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)$. لتكن V مجموعة عدد عناصرها m، ولتكن $P=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 1؛ بالاستناد إلى مبرهنة(٥,٢) نجد أنه يوجد j بحيث $|X_j|\geq i_j$. إذن، X_j تحتوي على مجموعات جزئية عدد عناصر كل منها يساوي i_j، وباختيار أي من هذه المجموعات الجزئية على أنها I_j، نستنتج أن m له الخاصة المطلوبة. إذن، $R(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)\leq m$. وللحصول على المساواة نثبت أن $m-1$ ليس له خاصة رمزي من النوع $(i_1,i_2,\ldots,i_n;1)$. في الحقيقة، إن $m-1=i_1+i_2+\cdots+i_n-n=(i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_n-1)$؛ وإذا كانت V مجموعة عدد عناصرها $m-1$، وكانت $P=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ تجزئة لمجموعة المجموعات الجزئية من V التي عدد عناصر كل منها 1 بحيث تحقق $|X_j|=i_j-1$ لكل $1\leq j\leq n$، فإنه لا توجد X_j بحيث تحتوي على مجموعة جزئية I_j عدد عناصرها i_j. □

وننهي هذا البند بالإشارة إلى أن هناك بعض النتائج التي تعطي حدوداً عليا أو حدوداً سفلى لأعداد رمزي. ولكن حساب هذه الأعداد أمر في غاية الصعوبة، كما أن المعروف منها قليل جداً.

تمارين (٥,٢)

١- أثبت تمهيدية(٥,١).

٢- إذا كانت i, j, k أعداداً صحيحة موجبة بحيث $i \geq k,\ j \geq k$ ، فأثبت أن

(أ) $R(i, k; k) = i$

(ب) $R(k, j; k) = j$

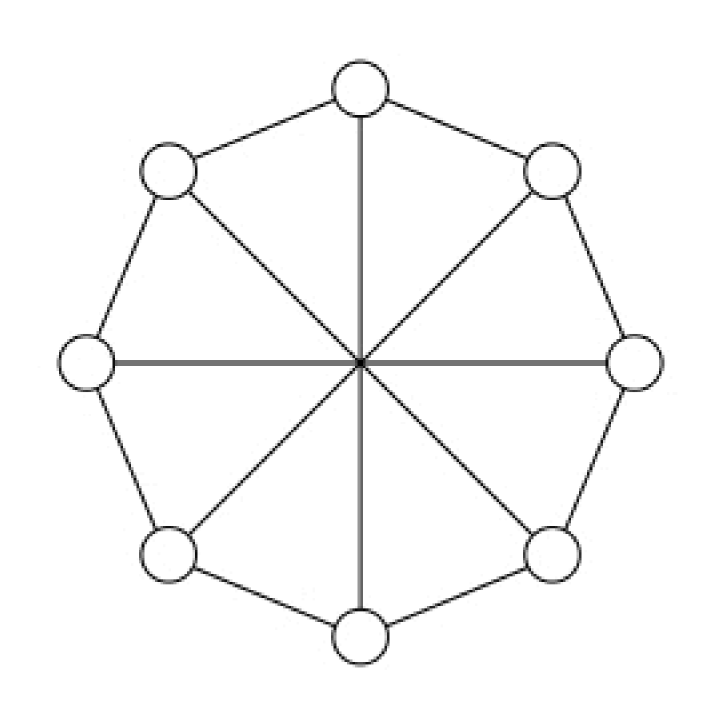
٣- ليكن i, j عددين صحيحين بحيث $i \geq 3,\ j \geq 3$. إذا كان كل من $R(i, j-1)$ و $R(i-1, j)$ عدداً زوجياً، فأثبت أن

$R(i, j) \leq R(i, j-1) + R(i-1, j) - 1$.

٤- أثبت أن $R(3,4) = 9$ كنتيجة لما يلي:

(أ) استخدم تمرين ٣ لبيان أن $R(3,4) \leq 9$.

(ب) اصبغ الرسم أدناه باللون الأحمر وبقية أضلاع الرسم K_8 باللون الأزرق، ثم استنتج أن العدد 8 ليس له خاصة رمزي من النوع $(3,4)$.



٥- أثبت أن $R(3,5) = 14$ كنتيجة لما يلي:

(أ) استخدم تمهيدية(٥,٢) وتمهيدية(٥,١) (هـ) وتمرين ٤ لبيان أن $R(3,5) \leq 14$.

(ب) أثبت أن العدد 13 ليس له خاصة رمزي من النوع $(3,5)$ ، وذلك باستخدام التلوين التالي لأضلاع الرسم K_{13} . لتكن $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_{13}\}$ هي مجموعة رؤوس K_{13} . لكل $1\le i,j\le 13$ اصبغ الضلع $\{v_i,v_j\}$ باللون الأحمر إذا كان $|i-j|\in\{1,5,8,12\}$ واصبغ الأضلاع المتبقية باللون الأزرق.

إذا كان i,j عددين صحيحين بحيث $i\ge 2, j\ge 2$ ، فأثبت أن $R(i,j)\le\binom{i+j-2}{i-1}$.

الفصل السادس

نظرية بوليا للعدّ
THE POLYA THEORY OF COUNTING

في هذا الفصل، يحتاج القارئ إلى معرفة عامة بمبادئ نظرية الزمر، وإلى إلمام خاص بزمر التباديل وزمر تناظر المضلعات المنتظمة وزمر تناظر المجسمات المنتظمة.

لتكن N علاقة تكافؤ على مجموعة منتهية A، ولتكن A/N مجموعة فصول التكافؤ. غالباً ما نهتم بحساب عدد فصول التكافؤ $|A/N|$. إذا كان $|A|=n$ وكان كل فصل تكافؤ يحتوي على m عنصراً فإن $|A/N|=\frac{n}{m}$ لأن A/N تجزئة للمجموعة A. أما إذا كانت فصول التكافؤ تحتوي على أعداد مختلفة من العناصر فإن حساب $|A/N|$ ليس بهذه البساطة. وعندما تكون علاقة التكافؤ ناتجة عن وجود تناظر ما فإن هذا التناظر يربطنا بنظرية الزمر من خلال زمر التباديل؛ ومن ثم نحصل على تقنيات لحساب $|A/N|$.

(٦,١) المدارات

لتكن G زمرة تباديل للمجموعة المنتهية X. نعرف العلاقة N على X كما يلي: لكل $x, y \in X$ فإن xNy إذا وفقط إذا كان يوجد $g \in G$

بحيث $g(x)=y$. نلاحظ أن N علاقة تكافؤ على X. نرمز لفصل التكافؤ للعنصر $x\in X$ بالرمز Gx ونلاحظ أن $Gx=\{g(x):g\in G\}$، كما نسمي Gx **مدار** Orbit العنصر x ونسمي فصول التكافؤ مدارات G على X. فيما يلي نتطلع إلى حساب عدد العناصر في كل مدار وإلى حساب عدد المدارات.

مبرهنة(٦,١)

لتكن G زمرة تباديل للمجموعة المنتهية X. لكل $x,y\in X$ نعرف المجموعة $G(x\to y)$ كما يلي: $G(x\to y)=\{g\in G:g(x)=y\}$. عندئذٍ،

(أ) $G(x\to x)$ زمرة جزئية من G تسمى الزمرة الجزئية المثبِّتة للعنصر x (أو **مُقِر** stabilizer العنصر x) ويرمز لها بالرمز G_x.

(ب) $G(x\to y)=hG_x$ لكل $h\in G(x\to y)$

(ج) $G(x\to y)=G_y h$ لكل $h\in G(x\to y)$

(د) إذا كان $Gu=Gv$ فإن $|G_u|=|G_v|$

البرهان

(أ) إذا كان $g_1,g_2\in G_x$ فإن $(g_1g_2)(x)=g_1(g_2(x))=g_1(x)=x$ إذن $g_1g_2\in G_x$. وبما أن G منتهية فينتج أن G_x زمرة جزئية من G.

(ب) ليكن $\alpha\in hG_x$. إذن $\alpha=h\beta$ حيث $\beta\in G_x$. عليه $\alpha(x)=(h\beta)(x)=h(\beta(x))=h(x)=y$.

وبالتالي فإن $\alpha\in G(x\to y)$. إذن $hG_x\subseteq G(x\to y)$.

نفــــرض الآن أن $d\in G(x\to y)$. إذن $d(x)=y$ وبالتـــــالي فـــإن $h^{-1}d(x)=h^{-1}(y)=x$ إذن $h^{-1}d\in G_x$. عليـــه $h^{-1}d=\delta$ حيـــث $\delta\in G_x$. إذن $d=h\delta$ وبالتالي فإن $d\in hG_x$. إذن $G(x\to y)\subseteq hG_x$.

(ج) لـــــيكن $\alpha\in G_y h$. إذن $\alpha=\beta h$ حيـــــث $\beta\in G_y$. عليـــــه $\alpha(x)=(\beta h)(x)=\beta(h(x))=\beta(y)=y$ ، وبالتـــــالي فـــإن $\alpha\in G(x\to y)$. إذن $G_y h\subseteq G(x\to y)$.نفـــرض الآن أن $d\in G(x\to y)$. إذن $d(x)=y$ ، $(dh^{-1})(y)=d(h^{-1}(y))=d(x)=y$ ، وبالتـــالي فـــإن $dh^{-1}\in G_y$. إذن $d\in G_y h$ وينتج أن $G(x\to y)\subseteq G_y h$.

(د) بمـــا أن $Gu=Gv$ فإنـــه يوجـــد $h\in G$ بحيـــث $h(u)=v$. أي، $h\in G(u\to v)$. إذن $G(u\to v)\neq\phi$. وبنـــاءً علـــى (ب) و (ج) فـــإن $hG_u=G(u\to v)=G_v h$. ولما كانت كل من G_u,G_v زمرة جزئيـة مـن G ، فإن $|G_v|=|G_v h|$,$|hG_u|=|G_u|$. وبالتالي فإن $|G_u|=|G_v|$. □

تزودنا المبرهنة التالية بصيغة لحساب عدد عناصر المدار.

مبرهنة(٦,٢)

إذا كانـــت G زمـــرة تباديـــل للمجموعـــة المنتهيـــة X وكـــان $x\in X$ فـــإن $|Gx|=\frac{|G|}{|G_x|}$.

البرهان

لـــتكن $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ ولـــتكن $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_m\}$. نعـــرف المجموعـــة $S(x)\subseteq G\times X$ كما يلي: $S(x)=\{(g,y):g\in G(x\to y)\}$. نحســب الآن $|S(x)|$ بطريقتين.

إن

$$S(x)=\{(g_1,y):g_1(x)=y\}\cup\cdots\cup\{(g_m,y):g_m(x)=y\}$$

إذن

$$|S(x)|=\left|\{(g_1,y):g_1(x)=y\}\right|+\ldots+\left|\{(g_m,y):g_m(x)=y\}\right|$$
$$=1+\cdots+1=m=|G|$$

من ناحية ثانية، إن

$$S(x)=\{(g,x_1):g(x)=x_1\}\cup\cdots\cup\{(g,x_n):g(x)=x_n\}$$

إذن

$$|S(x)|=\left|\{(g,x_1):g(x)=x_1\}\right|+\ldots+\left|\{(g,x_n):g(x)=x_n\}\right|$$
$$=\left|G(x\to x_1)\right|+\cdots+\left|G(x\to x_n)\right|$$

ومن (ب) فإن $G(x\to y)=hG_x$ حيث $h\in G(x\to y)$. إذن $G(x\to x_i)=\phi$ أو $G(x\to x_i)=h_iG_x$ حيث $h_i\in G(x\to y)$. ولما كانت G_x زمرة جزئية من G فإن $|h_iG_x|=|G_x|$. وبالتالي فإن: $|S(x)|=|Gx||G_x|$. إذن $|Gx||G_x|=|G|$، ومنه $|Gx|=\dfrac{|G|}{|G_x|}$. □

تزودنا المبرهنة التالية بصيغة مناسبة لحساب عدد المدارات عندما يكون عدد عناصر زمرة التباديل صغيراً.

مبرهنة(٦,٣)

إذا كانت G زمرة تباديل للمجموعة المنتهية X وكان t هو عدد مدارات G على X فإن $t=\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$ حيث $Fix(g)=\{x\in X: g\in G_x\}$ ، وتسمى $Fix(g)$ المجموعة المثبَّتة بالتبديل g.

البرهان

لتكن $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ ولتكن $G=\{g_1,g_2,...,g_m\}$، ولتكن $D=\{y_1,y_2,...,y_t\}$ مجموعة ممثلات لجميع مدارات G على X. نعرف المجموعة $E\subseteq G\times X$ كما يلي: $E=\{(g,x):g\in G_x\}$. نحسب الآن $|E|$ بطريقتين.

إن

$$E=\{(g_1,x):g_1\in G_x\}\cup\cdots\cup\{(g_m,x):g_m\in G_x\}$$

إذن

$$\begin{aligned}|E|&=\left|\{(g_1,x):g_1\in G_x\}\right|+...+\left|\{(g_m,x):g_m\in G_x\}\right|\\&=\left|Fix\ (g_1)\right|+...+\left|Fix\ (g_m)\right|=\sum_{g\in G}\left|Fix\ (g)\right| \quad ....\ (1)\end{aligned}$$

من ناحية ثانية، إن

$$E=\{(g,x_1):g\in G_{x_1}\}\cup\cdots\cup\{(g,x_n):g\in G_{x_n}\}$$

إذن

$$\begin{aligned}|E|&=\left|\{(g,x_1):g\in G_{x_1}\}\right|+...+\left|\{(g,x_n):g\in G_{x_n}\}\right|\\&=\left|G_{x_1}\right|+...+\left|G_{x_n}\right|=\sum_{t\in x}\left|G_x\right| \quad ....\ (2)\end{aligned}$$

من (1) و (2) ينتج أن

$$\sum_{x\in X}\left|G_x\right|=\sum_{g\in G}\left|Fix\ (g)\right| \quad ....\ (3)$$

وبما أن $\{Gy_1,Gy_2,...,Gy_t\}$ تجزئة للمجموعة X فإن (3) تعطينا

$$\sum_{x\in Gy_1}\left|G_x\right|+...+\sum_{x\in Gy_t}\left|G_x\right|=\sum_{g\in G}\left|Fix\ (g)\right|$$

و بالاستناد إلى (د) من مبرهنة(٦,١)نجد أن

$$|Gy_1||G_{y_1}|+\ldots+|Gy_t||G_{y_t}|=\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

وينتج من مبرهنة(٦,٢)أن $|Gy_i||G_{y_i}|=|G|$ لكل $1\le i\le t$. وبالتالي فإن

$$|G|+\ldots+|G|=\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

$$t|G|=\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

أي

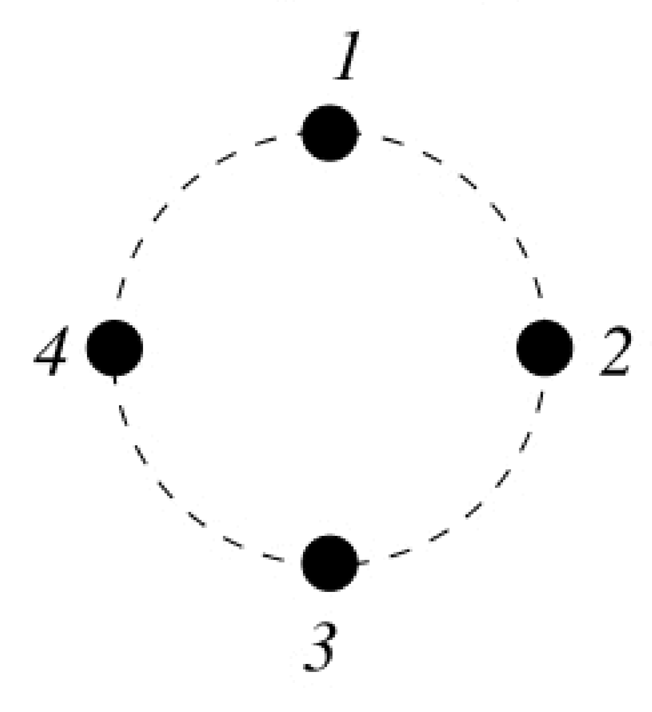
$$t=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

مثال(٦,١)

لدينا طاولة دائرية وثلاث مجموعات D_1,D_2,D_3 من الأطباق التي لها الشكل نفسه ولكن لون أطباق D_i هو C_i لكل $1\le i\le 3$. نريد إعداد الطاولة لأربعة أشخاص بحيث نوزع طبقاً واحداً لكل شخص. جد عدد النماذج المختلفة للتوزيعات إذا علمت أن تدوير التوزيع لا يعطي توزيعاً مختلفاً.

الحل

لنفرض أن أماكن وضع الأطباق معنونة كما في الشكل المعطى أدناه.



نلاحظ أن عدد التوزيعات الممكنة يساوي $3^4 = 81$ ، كما نلاحظ أن توزيعين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بوساطة دوران. إذن، عدد النماذج المختلفة للتوزيعات يساوي عدد مدارات الزمرة الدوروية $C_4 = \langle\sigma\rangle$ حيث نعتبر C_4 زمرة دورانات الشكل المعطى أعلاه مولّدة بالدورة $\sigma = (1\ \ 2\ 3\ 4)$ ؛ أي، زمرة تباديل لجميع التوزيعات الممكنة. يمكن الآن استخدام مبرهنة(٦,٣) لحساب المطلوب.

نلاحظ أن

$$C_4 = \{id, \sigma = (1\ 2\ 3\ 4), \sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4), \sigma^3 = (1\ 4\ 3\ 2)\}$$

نحسب الآن $|Fix(g)|$ لكل $g \in G_4$.

(أ) واضح أن $|Fix(id)| = 81$

(ب) إن كلاً من σ و σ^3 يثبت فقط التوزيعات التي تكون فيها جميع الأطباق لها اللون نفسه، وبالتالي فإن $3 = \left|Fix\left(\sigma^3\right)\right| = |Fix(\sigma)|$

(ج) إن σ^2 يثبت فقط التوزيعات التي يكون فيها للطبقين 1 و 3 اللون نفسه وللطبقين 2 و 4 اللون نفسه، وبالتالي فإن $9 = 3^2 = \left|Fix\left(\sigma^2\right)\right|$.

الآن نطبق مبرهنة(٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للتوزيعات يساوي

$$\frac{1}{4}[81+3+3+9] = \frac{96}{4} = 24$$

مثال(٦,٢)

لدينا ثلاث خرزات سوداء متطابقة وست خرزات بيضاء متطابقة. نريد تكوين قلادة من هذه الخرزات. جد عدد النماذج المختلفة للقلادات التي يمكن تشكيلها إذا علمت أنه يمكن تدوير وقلب القلادة.

الحل

يمكن النظر إلى خرزات القلادة على أنها موزعة على رؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه 9. بما أن عدد طرق توزيع 3 خرزات سوداء متطابقة على 9 رؤوس يساوي $\binom{9}{3}=84$ فإن عدد التشكيلات المكنة للخرزات يساوي 84. إن تدوير القلادة لا يعطينا قلادة مختلفة، كما أن قلب القلادة لا يعطينا قلادة أخرى. وبالتالي، فإن تشكلين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بوساطة دوران أو قلب. إذن، عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي عدد مدارات الزمرة الزوجية D_9 عندما نعتبر D_9 كزمرة تباديل لجميع التشكيلات المكنة. يمكن الآن استخدام مبرهنة(٦,٣) لحساب المطلوب.

باستخدام رموز إثبات مبرهنة(٦,٦) نجد أن

$$D_9=\{id,\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^8,\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau,\ldots,\sigma^8\tau\}$$

حيث

$$\sigma=(1\ 2\ \ldots\ 9)$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&9\\1&9&8&\ldots&2\end{pmatrix}$$

نحسب الآن $|Fix(g)|$ لكل $g\in D_9$.

(أ) واضح أن $|Fix(id)|=84$

(ب) إن انعكاساً حول محور يمر بمركز المضلع وأحد رؤوسه يثبت 4 تشكيلات؛ فمثلاً الانعكاس حول المحور 01 يثبت التشكيلات التي تكون فيها الخرزات السوداء موزعة على الرؤوس $9,1,2$ أو $8,1,3$ أو $7,1,4$ أو $6,1,4$. ونلاحظ أن عدد هذه الانعكاسات يساوي 9.

(ج) كل من الدوران الذي زاويته $\frac{2\pi}{3}$ راديان والـدوران الـذي زاويتـه $\frac{4\pi}{3}$ راديان يثبت التشكيلات الثلاثة التي تكون فيها الخـرزات الـسوداء موزعـة على الرؤوس $7,1,4$ أو $8,2,5$ أو $9,3,6$.

(د) كل من الدورانات غير المذكورة أعلاه لا يثبت أي تشكيل.

الآن نطبق مبرهنة(٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي

$$\frac{1}{18}[(1)(84)+(9)(4)+(2)(3)+(6)(0)]=\frac{126}{18}=7$$

ويمكن اعتبار القلادات التالية ممثلات للنماذج السبعة المختلفة حيث نعيّن القلادة بالرؤوس التي تتوزع عليها الخرزات السوداء:

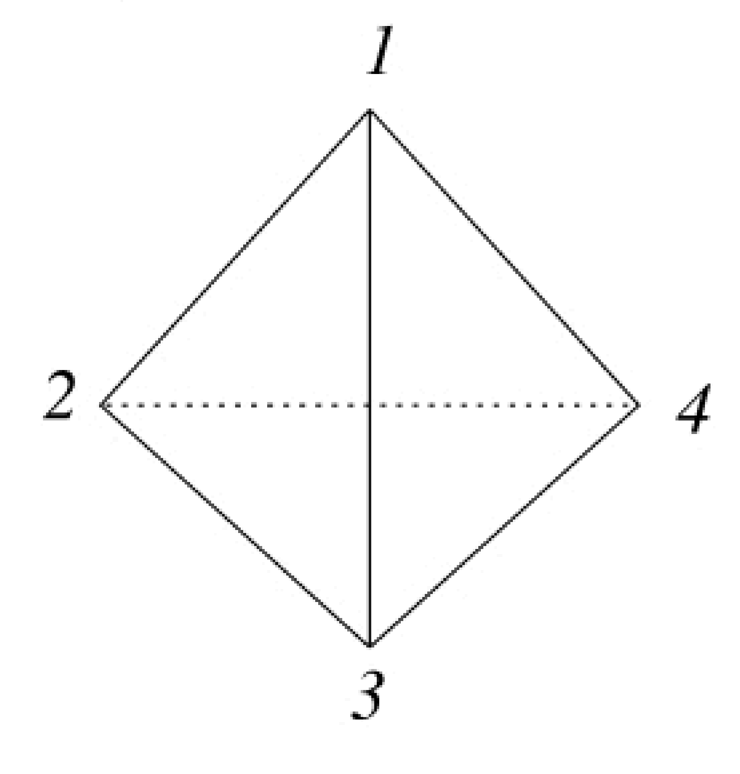
$6,1,5 \quad 7,1,4 \quad 8,1,3 \quad 9,1,2 \quad 7,1,3 \quad 7,1,2 \quad 8,1,2$

مثال(٦,٣)

لدينا رباعي وجوه منتظم. نريد تلوين أضلاع هذا الرباعي باستخدام الألوان الثلاثة c_1,c_2,c_3. جد عدد النماذج المختلفة للتلوينات إذا علمت أنه يمكن تدوير الرباعي في الفضاء.

الحل

لنفرض أن رؤوس الرباعي معنونة كما في الشكل التالي:



نلاحظ أن عدد التلوينات الممكنة يساوي 3^6، كما نلاحظ أن تلوينين لا يعتبران مختلفين إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بوساطة دوران. إذن، عدد النماذج المختلفة للتلوينات يساوي عدد مدارات زمرة التناوب A_4 عندما نعتبر A_4 كزمرة دورانات الرباعي على النحو التالي:

بالإضافة إلى التبديل المحايد $\sigma_1 = id$ فإن كلاً من التباديل $\sigma_2 = (12)(34)$، $\sigma_3 = (13)(24)$، $\sigma_4 = (14)(23)$ يمكن اعتباره دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها π راديان حول محور يمر بنقطتي المنتصف لضلعين. فمثلاً σ_2 يمثل دوراناً حول المحور المار بنقطة منتصف الضلع 12 ونقطة منتصف الضلع 34.

أما التباديل $\sigma_5 = (123)$، $\sigma_6 = (134)$، $\sigma_7 = (243)$، $\sigma_8 = (142)$ فإن كلاً منها يمثل دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها $\frac{2\pi}{3}$ راديان حول محور يمر بأحد الرؤوس ومركز الوجه المقابل لذلك الرأس. فمثلاً σ_7 يمثل دوراناً حول المحور المار بالرأس 1 ومركز المثلث 243.

كذلك إن كلاً من التباديل $\sigma_9 = (132)$، $\sigma_{10} = (234)$، $\sigma_{11} = (124)$، $\sigma_{12} = (143)$ يمثل دوراناً في الفضاء بزاوية مقدارها $\frac{4\pi}{3}$ راديان حول محور يمر بأحد الرؤوس ومركز الوجه المقابل لذلك الرأس. فمثلاً σ_{10} يمثل دوراناً حول المحور المار بالرأس 1 ومركز المثلث 243.

يمكن الآن استخدام مبرهنة(٦،٣) لحساب المطلوب، ولهذا الغرض نحسب $|Fix(g)|$ لكل $g \in A_4$.

(أ) واضح أن $|Fix(id)| = 3^6 = 729$

(ب) إن التبديل $\sigma_2 = (12)(34)$ يثبت كلاً من الضلعين 12 و 34 ويبدل الضلعين 13 و 24 كما يبدل الضلعين 23 و 14. إذن

$$\left|Fix\ (\sigma_2)\right| = (3)(3)(3)(3) = 81$$

وبالمثل فإن

$$\left|Fix\ (\sigma_3)\right| = \left|Fix\ (\sigma_4)\right| = 81$$

(ج) إن التبديل $\sigma_5 = (123)$ يرسل الضلع 41 إلى الضلع 42 والضلع 42 إلى الضلع 43 والضلع 43 إلى الضلع 41 ؛ كما أن σ_5 يرسل الضلع 12 إلى الضلع 23 والضلع 23 إلى الضلع 31 والضلع 31 إلى الضلع 12. إذن

$$\left|Fix\ (\sigma_5)\right| = (3)(3) = 9$$

وبالمثل فإن $\left|Fix\ (\sigma_i)\right| = 9$ لكل $6 \le i \le 12$.

الآن نطبق مبرهنة(٦,٣) فنجد أن عدد النماذج المختلفة للتلوينات يساوي

$$\frac{1}{12}[729 + (3)(81) + (8)(9)] = \frac{1044}{12} = 87$$

(٦,٢) أدلة الدورات لزمر التباديل

لتكن $X = \{1, 2, ..., n\}$ ولتكن S_n زمرة تباديل X. تسمى S_n زمرة التناظر من الدرجة n. إذا كان $\sigma \in S_n$ فإنه يمكن كتابة σ كحاصل ضرب دورات منفصلة؛ ونقول إن نمط σ هو $\left[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} ... n^{m_n(\sigma)}\right]$ حيث $m_i(\sigma)$ هو عدد

دورات σ من الطول i لكل $1 \le i \le n$. إذا كان σ تبديلاً من النمط $\left[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} ... n^{m_n(\sigma)}\right]$ فإننا نقرن به وحيد الحد الشكلي

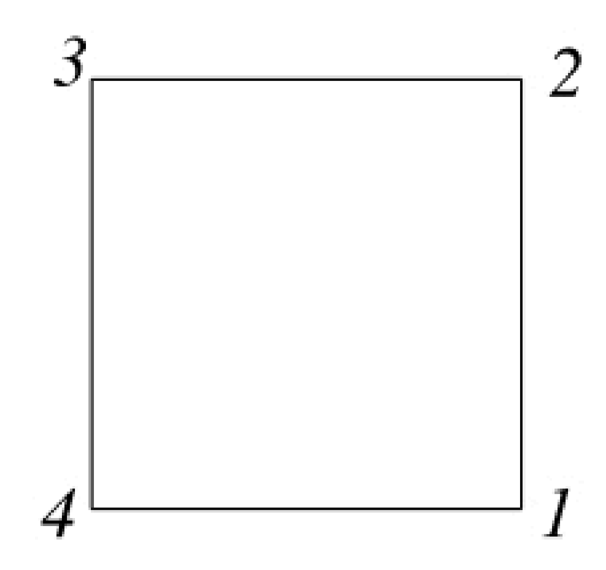
$$M_{\sigma}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x_1^{m_1(\sigma)}x_2^{m_2(\sigma)}...\,x_n^{m_n(\sigma)}$$

وإذا كانت G زمرة جزئية من S_n فإننا نقرن بها كثيرة الحدود الشكلية

$$\begin{aligned}P_G\left(x_1,x_2,...,x_n\right)&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}M_{\sigma}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}x_1^{m_1(\sigma)}x_2^{m_2(\sigma)}...\,x_n^{m_n(\sigma)}\\&=\frac{1}{|G|}\sum c\left(m_1,m_2,...,m_n\right)x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\,x_n^{m_n}\end{aligned}$$

حيث $c\left(m_1,m_2,...,m_n\right)$ عدد التباديل في G التي لها النمط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\,n^{m_n}\right]$ وحيث المجموع الأخير مأخوذ على جميع الأنماط. تسمى $P_G\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ دليل الدورات للزمرة G.

مثال(٦,٤)



إذا اعتبرنا تناظرات المربع الذي رؤوسه $1,2,3,4$ والموضح أعلاه، كزمرة تباديل G للمجموعة $X=\{1,2,3,4\}$ فإنه يمكن حساب $P_G\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ كما يلي:

الجدول التالي يعطينا $M_{\sigma}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ لكل $\sigma\in G$.

σ	m_1	m_2	m_3	m_4	$M_\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)$
id	4	0	0	0	x_1^4
(1234)	0	0	0	1	x_4^1
(1432)	0	0	0	1	x_4^1
(13)(24)	0	2	0	0	x_2^2
(12)(34)	0	2	0	0	x_2^2
(14)(23)	0	2	0	0	x_2^2
(13)	2	1	0	0	$x_1^2 x_2$
(24)	2	1	0	0	$x_1^2 x_2$

وبالتالي فإن

$$P_G\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\frac{1}{8}\left(x_1^4+2x_1^2x_2+3x_2^2+2x_4\right) \quad \square$$

فيما يلي نحسب أدلة الدورات لأصناف معينة من زمر التباديل.

مبرهنة(٦,٤)

(١) $P_{\{id\}}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=1$ حيث id هو التبديل المحايد.

(٢) $$P_{S_n}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\sum\frac{1}{1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط $\left[1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}\right]$

$$P_{A_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\sum\frac{1+(-1)^{m_2+m_4+\cdots}}{1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\ x_n^{m_n} \quad (٣)$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}\right]$ وحيث A_n هي زمرة التناوب من الدرجة n.

البرهان

(١) واضح أن التبديل المحايد id من النمط $\left[1^n\right]$ وبالتالي فإن

$$P_{\{id\}}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{1}{1}x_1^n=x_1^n$$

(٢) نعلم من نظرية الزمر أنه إذا كان $\sigma,\tau\in S_n$ فإن σ,τ مترافقان إذا وفقط إذا كان σ,τ من النمط نفسه. كما نعلم أنه إذا كان σ من النمط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}\right]$ فإن عدد عناصر فصل الترافق للتبديل σ يساوي $\frac{n!}{1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}\ m_1!m_2!\cdots m_n!}$. وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}P_{S_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)&=\frac{1}{|S_n|}\sum c\left(m_1,m_2,...,m_n\right)x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n}\\&=\frac{1}{n!}\sum\frac{n!}{1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\ x_n^{m_n}\\&=\sum\frac{1}{1^{m_1}2^{m_2}...\ n^{m_n}m_1!m_2!\cdots m_n!}\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\ x_n^{m_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{A_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)&=\frac{1}{|A_n|}\sum_{\sigma\in A_n}x_1^{m_1(\sigma)}x_2^{m_2(\sigma)}...\ x_n^{m_n(\sigma)} \quad (٣)\\&=\frac{2}{n!}\sum c\left(m_1,m_2,...,m_n\right)x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\ x_n^{m_n}\end{aligned}$$

حيث $c(m_1,m_2,...m_n)$ عدد التباديل في A_n التي لها النمط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\,n^{m_n}\right]$ وحيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط. بملاحظة أن A_n تتكون من التباديل الزوجية، وبفرض أن $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ نجد أن

$$P_{A_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{2}{n!}\sum\frac{n!}{1^{m_1}2^{m_2}...\,n^{m_n}m_1!m_2!...\,m_n!}\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\,x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على الأنماط $\left[1^{m_1}2^{m_2}...\,n^{m_n}\right]$ التي يكون فيها $m_2+m_4+m_6+...+m_{2k}$ عدداً زوجياً.

إذن

$$P_{A_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\frac{1+(-1)^{m_2+m_4+...+m_{2k}}}{1^{m_1}2^{m_2}...\,n^{m_n}m_1!m_2!...\,m_n!}\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}...\,x_n^{m_n}$$

حيث المجموع مأخوذ على جميع الأنماط.

مبرهنة(٦,٥)

إذا كانت $C_n=<\sigma>$ هي الزمرة الدوروية المولَّدة بالدورة $\sigma=(1\;2\;...\;n)$ فإن

$$P_{C_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)x_d^{\frac{n}{d}}$$

حيث φ هي دالة أويلر.

البرهان

ليكن $d\,|\,n$. بما أن C_n زمرة دوروية رتبتها n فإننا نعلم من نظرية الزمر أن C_n تحوي بالضبط $\varphi(d)$ عنصراً رتبة كل منها d. وهذه العناصر هي التباديل $\sigma^{\frac{kn}{d}}$ حيث $1\le k\le d$ و $\gcd(k,d)=1$. سنبيّن الآن أن كلاً من هذه التباديل يمكن كتابته كحاصل ضرب $\frac{n}{d}$ من الدورات المنفصلة التي طول كل منها d.

ليكن $1 \le i \le n-1$ وليكن m طول أقصر دورة عندما نكتب σ^i كحاصل ضرب دورات منفصلة؛ ولنفرض أن x ينتمي إلى إحدى الدورات التي طولها m. نلاحظ أن

$$\sigma^{im}(x) = \left(\sigma^i\right)^m (x) = x$$

من ناحية ثانية، إذا كان $y \in \{1,2,\ldots,n\}$ فإن كلاً من x و y ينتمي إلى الدورة $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$ وبالتالي فإنه يوجد r بحيث $\sigma^r(x) = y$. إذن

$$\left(\sigma^i\right)^m (y) = \sigma^{im}(y) = \sigma^{im}\sigma^r(x) = \sigma^r\sigma^{im}(x) = \sigma^r(x) = y$$

وبالتالي فإن y تنتمي إلى إحدى دورات σ^i التي طولها يقسم m. ولكن m يساوي طول أقصر دورات σ^i؛ عليه فإن طول الدورة التي تنتمي إليها y يساوي m. إذن جميع دورات σ^i لها الطول نفسه وهو m. وبالتالي فإنه إذا كانت رتبة σ^i تساوي d فإن $m = d$ وينتج أنه يمكن كتابة σ^i كحاصل ضرب $\frac{n}{d}$ من الدورات المنفصلة التي طول كل منها d.

إذن

$$P_{C_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|C_n|}\sum c(m_1, m_2, \ldots, m_n)\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\, x_d^{\frac{n}{d}}.$$

مبرهنة(٦,٦)

لتكن D_n زمرة زوجية رتبتها $2n$. إذا اعتبرنا D_n زمرة تباديل فإن

$$P_{D_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{2}P_{C_n}(x_1,x_2,...,x_n)+\begin{cases}\frac{1}{4}\left(x_2^{\frac{n}{2}}+x_1^2x_2^{\frac{n}{2}-1}\right), & n=2k\\ \frac{1}{2}x_1x_2^{\frac{n-1}{2}}, & n=2k+1\end{cases}$$

حيث C_n زمرة دوروية رتبتها n.

البرهان

ليكن لدينا مضلع منتظم عدد رؤوسه n ومركزه 0، ولنرقّم رؤوسه باتجاه عقارب الساعة بالأرقام $1,2,...,n$. إن الدوران بزاوية مقدارها $\frac{2\pi}{n}$ راديان حول المركز 0 يقابل الدورة $\sigma=(1\ 2\ 3\ ...\ n)$ كما أن الانعكاس حول المحور الذي يمر بالمركز 0 والرأس 1 يقابل التبديل $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ 1 & n & n-1 & ... & 2\end{pmatrix}$

ونعلم من نظرية الزمر أن

$$D_n=\{id,\sigma,\sigma^2,...,\sigma^{n-1},\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2,...,\tau\sigma^{n-1}\}$$

إن كتابة التباديل التي تنتمي إلى D_n كحاصل ضرب دورات منفصلة يعتمد على نوعية n من حيث كونه عدداً زوجياً أو فردياً؛ وهذا ما سنقدمه فيما يلي:

(أ) نفرض الآن أن n عدد زوجي وأن $n=2k\geq 4$.

إذن

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & 2k\\ 1 & 2k & 2k-1 & \cdots & k+2 & k+1 & k & \cdots & 2\end{pmatrix}$$

$$=(2\ \ 2k)(3\ \ 2k-1)\ \cdots\ (k\ \ k+2)$$

لأن المحور الذي يمر بالرأس 1 والمركز 0 يمر أيضاً بالرأس $k+1$.

وبحساب $\tau\sigma, \tau\sigma^2, \ldots$ نجد أن

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2k \\ 2k & 2k-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ \ 2k)(2\ \ 2k-1)\ \ldots\ (k\ \ k+1)$$
$$\tau\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & 2k \\ 2k-1 & 2k-2 & \cdots & \mathrm{k} & k-1 & \cdots & 2k \end{pmatrix}$$
$$= (1\ \ 2k-1)(2\ \ 2k-2)\ \ldots\ (k-1\ \ k+1)$$

إذن تتكون D_n من التالي:

١- n تبديلاً مقابلاً للدورانات وهي تكون الزمرة الدوروية

$$C_n = <\sigma> = \left\{ id, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1} \right\}$$

٢- $k = \dfrac{n}{2}$ تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها الأقطار وهي تكون

المجموعة $A = \left\{ \tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma^4, \ldots, \tau\sigma^k \right\}$.

٣- $k = \dfrac{n}{2}$ تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها المنصفات العمودية للأضلاع المتقابلة وهي تكون المجموعة

$$B = \left\{ \tau\sigma, \tau\sigma^3, \tau\sigma^5, \ldots, \tau\sigma^{2k-1} \right\}$$

نحسب الآن دليل الدورات فنجد أن

$$P_{D_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{|D_n|} \sum_{\alpha \in D_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \ldots x_n^{m_n(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{\alpha \in C_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots x_n^{m_n(\alpha)} + \frac{1}{2n} \left[\sum_{\alpha \in A} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots x_n^{m_n(\alpha)} \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha \in B} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots x_n^{m_n(\alpha)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{1}{2n} \left[\frac{n}{2} x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} + \frac{n}{2} x_2^{\frac{n}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{1}{4} \left[x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} + x_2^{\frac{n}{2}} \right]$$

(ب) نفرض الآن أن n عدد فردي وأن $n = 2k + 1 \geq 3$

إذن

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2k+1 \\ 1 & 2k+1 & 2k & ... & 2 \end{pmatrix}$$
$$= (2 \ \ 2k+1)(3 \ \ 2k) \ ... \ (k+1 \ \ k+2)$$
$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k+1 & ... & 2k+1 \\ 2k+1 & 2k & ... & k+1 & ... & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1 \ \ 2k+1)(2 \ \ 2k) \ ... \ (k \ \ k+2)$$

إذن D_n تتكون من التالي:

(i) n تبديلاً مقابلاً للدورانات وهي تكون الزمرة الدوروية

$$C_n = <\sigma> = \{id, \sigma, \sigma^2, ..., \sigma^{n-1}\}$$

(ii) n تبديلاً مقابلاً للانعكاسات التي محاورها تمر بالمركز 0 وبالرؤوس $1, 2, ..., n$ وهي تكون المجموعة

$$A = \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, ..., \tau\sigma^{n-1}\}$$

نحسب الآن دليل الدورات فنجد أن

$$P_{D_n}(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{\alpha\in C_n} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots\ x_n^{m_n(\alpha)} + \frac{1}{2n}\sum_{\alpha\in A} x_1^{m_1(\alpha)} x_2^{m_2(\alpha)} \cdots\ x_n^{m_n(\alpha)}$$
$$= \frac{1}{2} P_{C_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \frac{1}{2} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}$$

(٦,٣) التلوينات غير المتكافئة

لتكن X مجموعة بحيث $|X|=n$ ولتكن G زمرة تباديل لـِ X. ولتكن C مجموعة بحيث $|C|=r$. تسمى C مجموعة ألوان وتسمى كل دالة $w:X\to C$ تلويناً، كما يرمز لمجموعة التلوينات بالرمز $\Omega=C^X$.

نلاحظ أن عدد التلوينات يساوي $|\Omega|=r^n$.

لتكن S_Ω زمرة تباديل Ω. الآن، نعرف الدالة $\wedge:G\to S_\Omega$. لكل $g\in G$، فإننا نرمز لصورة g بالرمز $\hat{g}$ ونضع $\hat{g}(w)=w\circ g^{-1}$ لكل $w\in\Omega$ حيث $w\circ g^{-1}$ هو تحصيل w على g^{-1}. نلاحظ أنه إذا كان $\hat{g}\left(w_1\right)=\hat{g}\left(w_2\right)$ فإن $w_1\circ g^{-1}=w_2\circ g^{-1}$، وبالتالي فإن $\left(w_2\circ g^{-1}\right)\circ g=\left(w_1\circ g^{-1}\right)og$. إذن $w_1\circ\left(g^{-1}\circ g\right)=w_2\circ\left(g^{-1}\circ g\right)$ تعطينا $w_1=w_2$. عليه $\hat{g}$ دالة متباينة. وبما أن Ω مجموعة منتهية فينتج أن $\hat{g}$ شاملة وبالتالي فإن $\hat{g}\in S_\Omega$.

مبرهنة(٦,٧)

$\wedge:G\to S_\Omega$ تشاكل أحادي، وبالتالي فإن $G\cong\hat{G}$ حيث $\hat{G}=\mathrm{Im}\wedge$ هي صورة $\wedge$.

البرهان

سنثبت أولاً أن $\wedge:G\to S_\Omega$ تشاكل. نلاحظ أنه لكل $w\in\Omega$ ولكل $g_1,g_2\in G$ فإن

$$\widehat{g_1g_2}(w) = w \circ (g_1g_2)^{-1} = w \circ \left(g_2^{-1}g_1^{-1}\right)$$
$$= \left(w \circ g_2^{-1}\right) \circ g_1^{-1} = \left(\widehat{g_2}(w)\right) \circ g_1^{-1}$$
$$= \widehat{g_1}\left(\widehat{g_2}(w)\right) = \left(\widehat{g_1}\widehat{g_2}\right)(w)$$

وبالتالي فإن $\widehat{g_1g_2} = \widehat{g_1}\widehat{g_2}$. إذن $\wedge : G \to S_\Omega$ تشاكل.

سنثبت الآن أن $\wedge : G \to S_\Omega$ أحادي. لنفرض أن $g_1, g_2, \in G$ وأن $g_1 \neq g_2$. إذن $g_1^{-1} \neq g_2^{-1}$ وبالتالي فإنه يوجد $x_0 \in X$ بحيث $g_1^{-1}(x_0) \neq g_2^{-1}(x_0)$. من ناحية ثانية، فإنه يوجد تلوين $w_0 : X \to C$ بحيث $w_0\left(g_1^{-1}(x_0)\right) \neq w_0\left(g_2^{-1}(x_0)\right)$. إذن $w_0 \circ g_1^{-1} \neq w_0 \circ g_2^{-1}$، أي $\widehat{g_1}(w_0) \neq \widehat{g_2}(w_0)$. عليه $\widehat{g_1} \neq \widehat{g_2}$ وبالتالي فإن $\wedge : G \to S_\Omega$ أحادي.

ملاحظات

(١) $G \cong \widehat{G}$ ولكن G زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|X| = n$ بينما $\widehat{G}$ زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|\Omega| = r^n$.

(٢) $\widehat{G}$ زمرة تباديل لـِ Ω وإذا كان $w_1, w_2 \in \Omega$ في المدار نفسه فإنه يوجد $\widehat{g} \in \widehat{G}$ بحيث $\widehat{g}(w_1) = w_2$. أي، $w_1 \circ g^{-1} = w_2$ وبالتالي فإن $w_1 = w_2 \circ g$. وبالعكس، إذا كان $w_1 = w_2 \circ g$ فإن $w_1 \circ g^{-1} = w_2$ وبالتالي فإن w_1, w_2 لهما المدار نفسه.

تمهيدية(٦,١)

إذا كان $g \in G$ وإذا كُتب g كحاصل ضرب دورات منفصلة فإن $\widehat{g}(w) = w$ إذا وفقط إذا كان g ثابتاً على كل دورة من الدورات المنفصلة.

البرهان

لنفرض أن g قد كُتبت كحاصل ضرب دورات منفصلة وأن $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_t)$ إحدى هذه الدورات. لكل $1 \le i \le t-1$ فإن $x_i = g^{-1}(x_{i+1})$ تعطينا

$$w(x_i) = w\left(g^{-1}(x_{i+1})\right) = \left(\widehat{g}(w)\right)(x_{i+1}) = w(x_{i+1})$$

لأن $\widehat{g}(w) = w$. إذن $w(x_1) = \ldots = w(x_t)$. أي، w ثابت على الدورة $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_t)$.

من ناحية ثانية، إذا كان $w(x_1) = \ldots = w(x_t)$ فإن $x_1 = g^{-1}(x_2)$ و $w(x_1) = w(x_2)$ تعطينا $w(x_2) = w\left(g^{-1}(x_2)\right)$. أي، $w(x_2) = \left(\widehat{g}(w)\right)(x_2)$. وبالمثل $w(x) = \left(\widehat{g}(w)\right)(x)$ لكل $x \in X$. إذن $\widehat{g}(w) = w$. □

$\widehat{G}$ زمرة تباديل لمجموعة التلوينات Ω. نقول إن التلوينين $g_1, g_2 \in \Omega$ **متكافئان** إذا كانا ينتميان إلى أحد مدارات $\widehat{G}$ على Ω.

المبرهنة التالية تزودنا بطريقة لحساب عدد التلوينات غير المتكافئة.

مبرهنة(٦,٨)

إذا كانت G زمرة تباديل للمجموعة $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ وكان $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دليل دوراتها فإن عدد التلوينات غير المتكافئة $w: X \to C$ يساوي $P_G(r, r, \ldots, r)$ حيث عدد الألوان $|C| = r$.

البرهان

ليكن $\sigma \in G$ تبديلاً من النمط $\left[1^{m_1(\sigma)} 2^{m_2(\sigma)} \ldots n^{m_n(\sigma)}\right]$ وليكن $m_1(\sigma) + m_2(\sigma) + \ldots + m_n(\sigma) = k$. إذا كان $w: X \to C$ تلويناً بحيث

$\widehat{\sigma}(w)=w$ فإن تمهيدية(٦،١) تفيد بأن w ثابت على كل دورة عند كتابة σ كحاصل ضرب دورات منفصلة . وبالتالي فإن

$$\left|Fix\left(\widehat{\sigma}\right)\right|=\left|\left\{w\in\Omega:\widehat{\sigma}(w)=w\right\}\right|$$

$$=|\{w\in\Omega:\sigma \text{ ثابت على دورات } w\}|$$

$$=r^k=r^{m_1(\sigma)+m_2(\sigma)+\ldots+m_n(\sigma)}=r^{m_1(\sigma)}r^{m_2(\sigma)}\cdots r^{m_n(\sigma)}$$

$$=M_\sigma(r,r,\ldots,r)$$

من ناحية ثانية فإن مبرهنة(٦،٧) تفيد بأن $\left|\widehat{G}\right|=|G|$. إذن عدد مدارات $\widehat{G}$ على Ω يساوي

$$\frac{1}{\left|\widehat{G}\right|}\sum_{\widehat{\sigma}\in\widehat{G}}\left|Fix\left(\widehat{\sigma}\right)\right|=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}M_\sigma(r,r,\ldots,r)=P_G(r,r,\ldots,r)$$

باستخدام دليل الدورات، يمكن حساب عدد التلوينات غير المتكافئة؛ وهذا هو مضمون مبرهنة(٦،٨). سنقدم فيما يلي تعميماً يعطينا عدد التلوينات غير المتكافئة التي استخدمت فيها الألوان المختلفة أعداداً معيّنة من المرات.

فيما يلي، نفرض أن X هي المجموعة المراد تلوينها وأن $|X|=n$ وأن $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ هي مجموعة الألوان.

ليكن $w:X\to C$ تلويناً وليكن n_i هو عدد عناصر X التي تأخذ اللون c_i، $1\le i\le r$. نلاحظ أن $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$. نقرن بالتلوين $w:X\to C$ وحيد الحد الشكلي

$ind(w)=c_1^{n_1}c_2^{n_2}\ldots c_r^{n_r}$ ونسمي $ind(w)$ مؤشر w.

إذا كانت $A \subseteq \Omega = C^X$ فإننا نضع $f_A(c_1,c_2,...,c_r) = \sum_{w \in A} ind(w)$

ونسمي f_A الدالة المولِّدة لأعداد التلوينات التي تنتمي إلى A والتي استخدمت فيها الألوان المختلفة أعداداً معينة من المرات.

مبرهنة(٦,٩)

لتكن $\{X_1,X_2,...,X_k\}$ تجزئة لِـ X حيث $1 \le i \le k$ و $|X_i| = m_i$ و $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$. ولتكن

$$B = \{w \in \Omega : 1 \le i \le k \text{ لكل } X_i \text{ ثابت على } w\}$$

عندئذٍ،

$$f_B(c_1,c_2,...,c_r) = \left(c_1^{m_1} + c_2^{m_1} + ... + c_r^{m_1}\right)\left(c_1^{m_2} + c_2^{m_2} + ... + c_r^{m_2}\right)...\left(c_1^{m_k} + c_2^{m_k} + ... + c_r^{m_k}\right)$$

البرهان

ليكن $w : X \to C$ تلويناً معطى، ولنفرض أن w يعيّن اللون c_{j_i} لجميع عناصر X_i لكل $1 \le i \le k$. نلاحظ أننا نحصل على $ind(w)$ في مفكوك $\left(c_1^{m_1} + ... + c_r^{m_1}\right)...\left(c_1^{m_k} + ... + c_r^{m_k}\right)$ وذلك باختيار الحد $C_{j_i}^{m_i}$ من القوس رقم i لكل $1 \le i \le k$. ومن ناحية ثانية فإن اختيار حد من كل قوس يعيّن تلويناً ينتمي إلى B. وبالتالي فإن

$$\left(c_1^{m_1} + ... + c_r^{m_1}\right)...\left(c_1^{m_k} + ... + c_r^{m_k}\right) = \sum_{w \in B} ind(w) = f_B(c_1,c_2,...,c_r) \quad \square$$

الآن، لغرض الإعداد لإثبات مبرهنة بوليا فإننا نقدم تعميماً لمبرهنة(٦,٣).

مبرهنة(٦,١٠)

لتكن $G=\{g_1,g_2,...,g_m\}$ زمرة تباديل للمجموعة $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ ولتكن ψ دالةً ثابتةً على كل مدار من مدارات G على X ؛ أي،

$$\psi(g(x))=\psi(x) \qquad \forall g\in G, x\in X$$

لتكن $D=\{d_1,d_2,...,d_t\}$ مجموعة ممثلات لجميع مدارات G على X.

عندئذٍ،

$$\sum_{x\in D}\psi(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)$$

البرهان

ضع $E=\{(g,x):g(x)=x\}\subseteq G\times X$. سنحسب $\sum_{(g,x)\in E}\psi(x)$ بطريقتين.

$$\begin{aligned}\sum_{(g,x)\in E}\psi(x) &= \sum_{(g_1,x)\in E}\psi(x)+...+\sum_{(g_m,x)\in E}\psi(x)\\ &= \sum_{x\in Fix(g_1)}\psi(x)+...+\sum_{x\in Fix(g_m)}\psi(x)\\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{x\in Fix(g_k)}\psi(x)\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)\right) \quad .... (1)\end{aligned}$$

من ناحية ثانية فإن

$$\begin{aligned}\sum_{(g,x)\in E}\psi(x) &= \sum_{(g,x_1)\in E}\psi(x_1)+...+\sum_{(g,x_n)\in E}\psi(x_n)\\ &= \sum_{g\in G_{x_1}}\psi(x_1)+\cdots+\sum_{g\in G_{x_n}}\psi(x_n)\\ &= |G_{x_1}|\psi(x_1)+...+|G_{x_n}|\psi(x_n)\\ &= \sum_{x\in Gd_1}|G_x|\psi(x)+...+\sum_{x\in Gd_t}|G_x|\psi(x)\\ &= |Gd_1||G_{d_1}|\psi(d_1)+...+|Gd_t||G_{d_t}|\psi(d_t)\end{aligned}$$

$$=|G|\psi(d_1)+...+|G|\psi(d_t)$$
$$=|G|\left(\psi(d_1)+...+\psi(d_t)\right)$$
$$=|G|\sum_{k=1}^{t}\psi(d_k)=|G|\sum_{x\in D}\psi(x) \quad .... (2)$$

حيث تم الاستناد إلى مبرهنة(٦,١) ومبرهنة(٦,٢).

من (1) و (2) نجد أن

$$|G|\sum_{x\in D}\psi(x)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)\right)$$

وبالتالي فإن

$$\sum_{x\in D}\psi(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{x\in Fix(g)}\psi(x)\right)$$

مبرهنة(٦,١١) (مبرهنة بوليا)

لتكن G زمرة تباديل للمجموعة $X=\{1,2,...,n\}$، $C=\{c_1,c_2,...,c_r\}$ مجموعة ألوان، $\Omega=C^X$ مجموعة التلوينات، $\wedge:G\to S_\Omega$ الدالة المعرَّفة بالقاعدة $\widehat{g}(w)=w\circ g^{-1}$ لكل $w\in\Omega$. ولتكن D مجموعة ممثلات لمدارات $\widehat{G}$ على Ω. عندئذٍ، إن الدالة المولِّدة لأعداد التلوينات غير المتكافئة للمجموعة X هي

$$f_D(c_1,c_2,...,c_r)=P_G(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

حيث $\alpha_i=c_1^i+c_2^i+...+c_r^i \quad 1\le i\le n$.

البرهان

يمكن النظر إلى ind كدالة ثابتة على كل مدار من مدارات $\widehat{G}$ على Ω؛ وبالاستناد إلى مبرهنة(٦,١٠) نجد أن

$$f_D(c_1,...,c_r)=\sum_{w\in D} ind(w)$$
$$=\frac{1}{|\widehat{G}|}\sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}}\left(\sum_{w\in Fix(\widehat{g})} ind(w)\right)$$
$$=\frac{1}{|\widehat{G}|}\sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}} f_{Fix(\widehat{g})}(c_1,c_2,...,c_r)$$

نعلم من تمهيدية(٦,١) أنه إذا كان $g\in G$ وإذا كتب g كحاصل ضرب دورات منفصلة فإن w ثابت على كل دورة من هذه الدورات إذا وفقط إذا كان $w\in Fix(\widehat{g})$. وبتطبيق مبرهنة(٦,٩) نجد أن

$$f_{Fix(\widehat{g})}(c_1,c_2,...,c_r)=\left(c_1^{m_1}+...+c_r^{m_1}\right)...\left(c_1^{m_k}+...+c_r^{m_k}\right)$$

حيث $m_1,...,m_k$ هي أطوال دورات g المنفصلة. وإذا كانت g من النمط $\left[1^{t_1}2^{t_2}\cdots n^{t_n}\right]$ فإن

$$f_{Fix(\widehat{g})}(c_1,...,c_r)=\alpha_1^{t_1}\alpha_2^{t_2}...\alpha_n^{t_n}$$
$$=M_g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

وبما أن $G\cong\widehat{G}$ فإن

$$f_D(c_1,...,c_r)=\sum_{w\in D} ind(w)$$
$$=\frac{1}{|\widehat{G}|}\sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}} M_g(\alpha_1,...,\alpha_n)$$
$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} M_g(\alpha_1,...,\alpha_n)$$
$$=P_G(\alpha_1,...,\alpha_n)$$

ملاحظات

(١) نلاحظ أن معامل $c_1^{k_1}c_2^{k_2}\dots c_r^{k_r}$ في مفكوك $P_G\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$ يساوي عدد التلوينات غير المتكافئة بحيث ألوان عناصر X كما يلي: k_1 عنصراً تأخذ اللون c_1، k_2 عنصراً تأخذ اللون c_2، ...، k_r عنصراً تأخذ اللون c_r.
ولحساب هذا المعامل فإننا لا نحتاج إلى إيجاد المفكوك الكامل لـِ $P_G\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$ وإنما لإيجاد الحدود ذات الصلة بالمعامل.

(٢) نلاحظ أنه إذا وضعنا 1 مكان c_i لكل $1 \le i \le r$ فإننا نحصل على $f_D(1,1,\dots,1) = P_G(r,r,\dots,r)$. وهذا يعطينا عدد التلوينات غير المتكافئة. □

استُخدمت مبرهنة(٦,٣) ومبرهنة بوليا لحل مسائل تركيبية مهمة في الكيمياء وفي تصميم الدارات المنطقية، ويمكن العودة إلى المراجع للاطلاع على ذلك. وسنكتفي هنا بإعطاء بعض الأمثلة العامة ومثال من نظرية الرسومات لنوضح كيفية معالجة بعض المسائل التطبيقية والنظرية.

مثال(٦,٥)

بالإشارة إلى مثال(٦,١) فإنه يمكن حساب المطلوب وزيادة باستخدام مبرهنة بوليا.
من مبرهنة(٦,٥) نجد أن

$$P_{C_4}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) = \frac{1}{4}\left[x_1^4 + x_2^2 + 2x_4\right]$$

إذن

$$P_{C_4} = (3,3,3,3) = \frac{1}{4}\left[3^4 + 3^2 + 2(3)\right]$$
$$= \frac{96}{4} = 24$$

هو عدد النماذج المختلفة للتوزيعات.

ولبيان المعلومات الإضافية التفصيلية التي يمكن الحصول عليها من مبرهنة بوليا فإننا نحسب

$$\begin{aligned}
&P_{C_4}\left(c_1+c_2+c_3, c_1^2+c_2^2+c_3^2, c_1^3+c_2^3+c_3^3, c_1^4+c_2^4+c_3^4\right) \\
&=\frac{1}{4}\left[\left(c_1+c_2+c_3\right)^4+\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+2\left(c_1^4+c_2^4+c_3^4\right)\right] \\
&=c_1^4+c_2^4+c_3^4+c_1^3c_2+c_1^3c_3+c_1c_2^3+c_2^3c_3 \\
&+c_1c_3^3+c_2c_3^3+2c_1^2c_2^2+2c_1^2c_3^2+2c_2^2c_3^2 \\
&+3c_1^2c_2c_3+3c_1c_2^2c_3+3c_1c_2c_3^2
\end{aligned}$$

ومن هنا نجد أنه يوجد نموذجان مختلفان بحيث يكون طبقان لهما اللون c_1 وطبقان لهما اللون c_2 ؛ كما يوجد ثلاثة نماذج مختلفة بحيث يكون طبقان لهما اللون c_1 وطبق له اللون c_2 وطبق له اللون c_3 وهلم جراً.

ويمكن اعتبار التوزيعات، الموضحة في الشكل أدناه، ممثلات لتلك النماذج المختلفة

C1 C2 C2 C1

C1 C1 C2 C2

C1 C1 C3 C2

C1 C1 C2 C3

C1 C2 C3 C1

مثال(٦,٦)

بالإشارة إلى مثال(٦,٢) فإنه يمكن حساب عدد النماذج المختلفة للقلادات وبيان المعلومات التفصيلية المتعلقة بذلك باستخدام مبرهنة بوليا.

من مبرهنة(٦,٦) نجد أن دليل الدورات للزمرة D_9 هو

$$P_{D_9}(x_1,\dots,x_9)=\frac{1}{2}P_{C_9}(x_1,\dots,x_9)+\frac{1}{2}x_1x_2^4$$
$$=\frac{1}{18}\left[x_1^9+2x_3^3+6x_9\right]+\frac{1}{2}x_1x_2^4$$

وبالتالي فإن

$$P_{D_9}(x_1,\dots,x_9)$$
$$=\frac{1}{18}\left[(c_1+c_2)^9+2\left(c_1^3+c_3^2\right)^3+6\left(c_1^9+c_2^9\right)\right]+\frac{1}{2}(c_1+c_2)\left(c_1^2+c_2^2\right)^4$$

وإذا اعتبرنا c_1 هو اللون الأسود و c_2 هو اللون الأبيض فإن عدد النماذج المختلفة للقلادات يساوي معامل $c_1^3c_2^6$ في مفكوك $P_{D_9}(\alpha_1,\dots,\alpha_9)$. ومنه نجد أن هذا العدد يساوي

$$\frac{1}{18}\left(\binom{9}{3}+2(3)\right)+\frac{1}{2}(4)$$
$$=\frac{1}{18}\left[\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)}+6\right]+2=\frac{1}{18}[90]+2=7$$

مثال(٦,٧)

بالإشارة إلى مثال(٦,٣) فإنه يمكن حساب عدد النماذج المختلفة للتلوينات وبيان المعلومات التفصيلية المتعلقة بذلك باستخدام مبرهنة بوليا. ولهذا الغرض، لتكن

$$E=\{12,13,14,23,24,34\}$$

هي مجموعة أضلاع رباعي الوجوه المنتظم المعطى. نجد الآن عناصر الزمرة $\overline{A_4}=\left\{\overline{\sigma_i}:1\le i\le 12\right\}$ التي تتكون من تباديل للمجوعة E مُحْدثة بوساطة عناصر الزمرة A_4.

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma_1}&=id\\
\overline{\sigma_2}&=\overline{(12)(34)}=\begin{pmatrix}12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34\\ 12 & 24 & 23 & 14 & 13 & 34\end{pmatrix}\\
&=(13\ 24)(14\ 23)\\
\overline{\sigma_3}&=\overline{(13)(24)}=(12\ 34)(14\ 23)\\
\overline{\sigma_4}&=\overline{(14)(23)}=(12\ 34)(13\ 24)\\
\overline{\sigma_5}&=\overline{(1\ 2\ 3)}=(12\ 23\ 13)(14\ 24\ 34)\\
\overline{\sigma_6}&=\overline{(1\ 3\ 4)}=(12\ 23\ 24)(13\ 34\ 14)\\
\overline{\sigma_7}&=\overline{(2\ 34)}=(12\ 13\ 14)(23\ 34\ 24)\\
\overline{\sigma_8}&=\overline{(1\ 4\ 2)}=(12\ 14\ 24)(13\ 34\ 23)\\
\overline{\sigma_9}&=\overline{(1\ 32)}=(12\ 13\ 23)(14\ 34\ 24)\\
\overline{\sigma_{10}}&=\overline{(2\ 34)}=(12\ 13\ 14)(23\ 34\ 24)\\
\overline{\sigma_{11}}&=\overline{(1\ 2\ 4)}=(12\ 24\ 14)(13\ 23\ 34)\\
\overline{\sigma_{12}}&=\overline{(1\ 4\ 3)}=(12\ 24\ 23)(13\ 14\ 34)
\end{aligned}$$

إذن، دليل الدورات للزمرة $\overline{A_4}$ هو

$$P_{\overline{A_4}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=\frac{1}{12}\left[x_1^6+3x_1^2x_2^2+8x_3^2\right]$$

وبالتالي، فإن عدد التلوينات المختلفة يساوي

$$\frac{1}{12}\left[3^6+3\left(3^2\right)\left(3^2\right)+8\left(3^2\right)\right]$$
$$=\frac{3^2}{12}\left[3^4+3\left(3^2\right)+8\right]=\frac{3}{4}[81+27+8]$$
$$=\frac{3}{4}\times 116=87$$

ويمكن الحصول على المعلومات التفصيلية من

$$P_{\overline{A_4}}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6\right)$$

حيث

$$\alpha_i=c_1^i+c_2^i+c_3^i \quad , \quad 1\le i\le 6$$

ونحصل بعد التعويض على

$$P_{\overline{A_4}}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_6\right)=$$
$$\frac{1}{12}\left[\left(c_1+c_2+c_3\right)^6+3\left(c_1+c_2+c_3\right)^2\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)^2+8\left(c_1^3+c_2^3+c_3^3\right)^2\right]$$

مثال(٦,٨)

جد عدد الرسوم البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوسها n وعدد أضلاعها m.

الحل

نفرض أن مجموعة الرؤوس هي $V=\{1,2,\ldots,n\}$ وأن مجموعة الأضلاع هي مجموعة جزئية من المجموعة $E=\{\{i,j\}:i,j\in V, i\neq j\}$ التي عدد عناصرها $|E|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

لتكن G_n هي مجموعة جميع الرسوم البسيطة التي مجموعة رؤوسها هي V ومجموعة أضلاعها هي مجموعة جزئية من E. نعرف الدالة $\rho : S_V = S_n \to S_E$ كما يلي:

لكل $\sigma \in S_V$ فإن $\rho(\sigma) = \rho_\sigma$ حيث $\rho_\sigma : E \to E$ يحقق $\rho_\sigma(\{i,j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ لكل $\{i,j\} \in E$.

ويمكن أن يثبت القارئ بسهولة أن $\rho_\sigma \in S_E$ وأن $\rho : S_V \to S_E$ تشاكل أحادي. وبالتالي فإن $S_V \cong \rho(S_V)$. ونلاحظ أن S_V زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|V| = n$ بينما $\rho(S_V)$ زمرة تباديل لمجموعة عدد عناصرها $|E| = \binom{n}{2}$.

نعتبر الآن مجموعة التلوينات $\Omega = C^X$ حيث $X = E$ و $C = \{T, F\}$. نلاحظ فيما يلي أنه يوجد تقابل بين المجموعة Ω والمجموعة G_n. إذا كان $w : X = E \to C$ تلويناً فإننا نقرن به الرسم البسيط الذي مجموعة رؤوسه V والذي يكون فيه e ضلعاً إذا وفقط إذا كان $w(e) = T$. أما إذا كان $H = (V, E(H)) \in G_n$ فإننا نقرن به التلوين $w : E \to C$ المعرف كما يلي: لكل $e \in E$ فإن

$$w(e) = \begin{cases} T, & e \in E(H) \\ F, & e \notin E(H) \end{cases}$$

أخيراً، نلاحظ أن $\widehat{\rho(S_V)}$ زمرة تباديل للمجموعة $X = E$ وأن رسمين من المجموعة G_n يتماثلان إذا وفقط إذا كان التلوينان المقابلان للرسمين متكافئان. وبالتالي فإن أعداد الرسوم غير المتماثلة هي أعداد التلوينات غير المتكافئة والتي تعطى بالدالة المولِّدة

$$f_D(T,F) = P_{\rho(S_v)}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|E|}\right)$$

حيث

$$\alpha_i = T^i + F^i \quad \forall \ 1 \le i \le |E|$$

على سبيل المثال، عندما $n = 4$ فإن

$$f_D(T,F) = P_{\rho(S_4)}\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\right)$$

وبحساب دليل الدورات نجد أن

$$P_{\rho(S_4)}\left(x_1, \ldots, x_6\right) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 9x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2 x_4\right]$$

إذن

$$f_D(T,F) = P_{\rho(S_n)}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_6\right)$$

$$= T^6 + T^5F + 2T^4F^2 + 3T^3F^3 + 2T^2F^4 + TF^5 + F^6$$

إذن عدد الرسوم غير المتماثلة هو

$$f_D(1,1) = 1+1+2+3+2+1+1 = 11$$

والجدول التالي يصنفها حسب عدد الأضلاع:

عدد الأضلاع	6	5	4	3	2	1	0
عدد الرسوم غير المتماثلة	1	1	2	3	2	1	1

تمارين

١- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مثلث عندما يكون

(أ) المثلث ليس متطابق الأضلاع وليس متساوي الساقين وعدد الألوان المتاحة يساوي 2.

(ب) المثلث ليس متطابق الأضلاع ولكنه متساوي الساقين وعدد الألوان المتاحة يساوي 2.

(ج) المثلث متطابق الأضلاع وعدد الألوان المتاحة يساوي r.

٢- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات رؤوس مثلث متطابق الأضلاع إذا كان عدد الألوان المتاحة هو 5 وكانت التلوينات تستخدم لونين على الأقل.

٣- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات رؤوس مربع إذا كان عدد الألوان المتاحة يساوي

(أ) 2

(ب) r

٤- جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات أضلاع مربع إذا كان عدد الألوان المتاحة هو 6 وكانت ألوان الأضلاع مختلفة.

٥- جد عدد التلوينات المختلفة لأضلاع مربع عندما يكون عد الألوان المتاحة يساوي r.

٦- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مستطيل طوله لا يساوي عرضه، عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي

(أ) 2

(ب) r

٧- جد عدد الأقراص الدائرية الملونة المختلفة عندما يقسم أحد وجهي القرص إلى خمسة قطاعات متطابقة ويلون قطاعان باللون c_1 وقطاعان باللون c_2 وقطاع واحد باللون c_3.

٨- جد عدد القلادات المختلفة التي يمكن تكوينها من خرزتين لهما اللون c_1 وخرزتين لهما اللون c_2 وخرزة واحدة لها اللون c_3.

٩- جد عدد القلادات المختلفة التي يمكن تكوينها من 3 خرزات سوداء و 13 خرزة بيضاء.

١٠- (أ) لدينا رقعة مستطيلة مقسمة إلى ٤ مستطيلات متطابقة بحيث تكون شريطاً له الشكل التالي:

جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مستطيلات الشريط عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.

(ب) جد عدد النماذج المختلفة عندما يتكون الشريط من 5 مستطيلات متطابقة.

(ج) جد عدد النماذج المختلفة عندما يكون عدد المستطيلات المتطابقة n وعدد الألوان المتاحة r.

١١- لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى 4 مربعات متطابقة. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.

١٢- لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى 9 مربعات متطابقة. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 2.

١٣- لدينا رقعة مربعة مقسمة إلى مربعات متطابقة عددها n^2. جد عدد النماذج المختلفة لتلوينات مربعات الرقعة عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي r.

١٤- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس رباعي وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي n.

١٥- جد عدد التلوينات المختلفة لوجوه رباعي وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي n.

١٦- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس مكعب عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي n.

١٧- جد عدد التلوينات المختلفة لوجوه مكعب بحيث تلون ثلاثة وجوه باللون c_1 ويلون وجهان باللون c_2 ويلون وجه واحد باللون c_3.

١٨- جد عدد التلوينات المختلفة لرؤوس ثماني وجوه منتظم عندما يكون عدد الألوان المتاحة يساوي 3.

١٩- جد عدد العلاقات الثنائية على مجموعة رباعية والتي ليست متكافئة تحت تأثير التباديل المحدثة بتباديل المجموعة.

٢٠- جد عدد علاقات التكافؤ على مجموعة رباعية والتي ليست متكافئة تحت تأثير التباديل المحدثة بتباديل المجموعة.

المراجع

المراجع العربية

سمحان، معروف و شراري، أحمد، *مبادئ الرياضيات المتقطعة*. جامعة الملك سعود، ١٤١٩هـ.

المراجع الأجنبية

Biggs N. L., *Discrete Mathematics.* University Press, Oxford, 1987.
Michaels J. G. and **Rosen K. H**., *Applications of Discrete Mathematics*. McGraw-Hill, Inc., International Edition 1992.
Roberts F. S., *Applied Combinatorics*. Prentice-Hall, 1984.
Stanley R. P., *Enumerative Combinatorics , Volume I*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books and Software, Montery, California, 1986.
Townsend M., *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory,* The Benjamain/Cummings, California, 1987.
Tucker A., *Applied Combinatorics.* John Wiley and Sons, New York 1980.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

التفاف	Convolution
أعداد بل	Bell numbers
أعداد رمزي	Ramsey numbers
أعداد ستيرلنج من النوع الثاني	Stirling numbers of the second kind
أعداد كتلان	Catalan numbers
الدالة المولدة	Generating function
الدالة المولدة الأسية	Exponential generating function
الدالة المولدة العادية	Ordinary generating function
العنصر المحايد	Identity element
الفضاء	Space
إنعكاس	Reflection

ب

بسيط	Simple

ت

تبديل	Permutation
تبديل تام	Derangement
تجزئات الأعداد الصحيحة	Partitions of positive integers
تجزئات المجموعات	Partitions of sets
تشاكل	Homomorphism
تشكيل	Configuration
تلوين الأضلاع	Edge coloring
توزيع	Distribution
توفيق أو تركيب	Combination

ث

ثابت	Constant
ثماني وجوه	Octahedron
ثماني وجوه منتظم	Regular octahedron

ح

حدّ	Term

د

دورات منفصلة	Disjoint cycles
دوران	Rotation
دليل	Index

Cycle	دورة

ر

Radian	راديان
Vertex	رأس
Regular tetrahedron	رباعي وجوه منتظم
Order	رتبة
Order of a recurrence relation	رتبة علاقة ارتدادية
Graph	رسم
Complete graph	رسم تام

ز

Permutation group	زمرة تباديل
Symmetric group	زمرة التناظر
Alternating group	زمرة التناوب
Rotation group	زمرة الدوران
Subgroup	زمرة جزئية
Cyclic group	زمرة دوروية
Dihedral group	زمرة زوجية
Even	زوجي

ش

Ferrers diagram	شكل فيريرز

ص

صيغة مختصرة	Closed formula

ض

ضلع	Edge

ط

طول	Length

ع

علاقة ارتدادية	Recurrence relation
علاقة ارتدادية خطية	Linear recurrence relation
علاقة ارتدادية متجانسة	Homogeneous recurrence relation
عنصر	Element

ف

فردي	Odd

ل

لون	Color

م

مبدأ برج الحمام	Pigeonhole principle
مبدأ التضمين و الاقصاء	The inclusion-exclusion principle
مبدأ التراكب	Superposition principle

The rule of correspondence	مبدأ التقابل
The rule of sum	مبدأ المجموع
The rule of product	مبدأ حاصل الضرب
Binomial theorem	مبرهنة ذات الحدين
Multinomial theorem	مبرهنة متعددة الحدود
Sequence	متتالية
Binomial series	متسلسلة ذات الحدين
Formal power series	متسلسلة قوى شكلية
Pascal's identity	متطابقة باسكال
Equivalent	متكافئ
Isomorphic	متماثل
Triangulation	مثالثة
Triangle	مثلث
Equilateral triangle	مثلث متساوي الأضلاع
Isosceles triangle	مثلث متساوي الساقين
Regular solid	مجسم منتظم
Multiset	مجموعة مضاعفة
System of distinct representatives	مجموعة ممثلات مختلفة
Induced	محدث
Axis	محور
Orbit	مدار
Conjugate	مرافق

Square	مربع
Center	مركز
Regular polygon	مضلع منتظم
Rectangle	مستطيل
Coefficient	معامل
Generalized binomial coefficients	معاملات ذات الحدين المعممة
Expansion	مفكوك
Stabilizer	مُقِر
Cube	مكعب
Perpendicular bisector	منصف عامودي
Transpose	منقول
Generated by	مولد بـِ

ن

Type	نمط
Model	نموذج
The sample model of counting	نموذج العينة للعد
The distribution model of counting	نموذج التوزيع للعد

و

Face	وجه

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Alternating group	زمرة التناوب
Axis	محور

B

Bell numbers	أعداد بل
Binomial series	متسلسلة ذات الحدين
Binomial theorem	مبرهنة ذات الحدين

C

Catalan numbers	أعداد كتلان
Center	مركز
Closed formula	صيغة مختصرة
Coefficient	معامل
Color	لون
Combination	توفيق أو تركيب
Complete graph	رسم تام
Configuration	تشكيل
Conjugate	مرافق
Constant	ثابت
Convolution	التفاف
Cube	مكعب

Cycle	دورة
Cyclic group	زمرة دوروية

D

Derangement	تبديل تام
Dihedral group	زمرة زوجية
Disjoint cycles	دورات منفصلة
Distribution	توزيع

E

Edge	ضلع
Edge coloring	تلوين الأضلاع
Element	عنصر
Equilateral triangle	مثلث متساوي الأضلاع
Equivalent	متكافئ
Even	زوجي
Expansion	مفكوك
Exponential generating function	الدالة المولدة الأسية

F

Face	وجه
Ferrers diagram	شكل فيريرز
Formal power series	متسلسلة قوى شكلية

Generalized binomial coefficients	معاملات ذات الحدين المعممة
Generated by	مولد بـِ
Generating function	الدالة المولدة
Graph	رسم

H

Homogeneous recurrence relation	علاقة ارتدادية متجانسة
Homomorphism	تشاكل

I

Identity element	العنصر المحايد
Index	دليل
Induced	محدث
Isomorphic	متماثل
Isosceles triangle	مثلث متساوي الساقين

L

Length	طول
Linear recurrence relation	علاقة ارتدادية خطية

M

Model	نموذج
Multinomial theorem	مبرهنة متعددة الحدود
Multiset	مجموعة مضاعفة

O

Octahedron	ثماني وجوه
Odd	فردي
Orbit	مدار
Order	رتبة
Order of a recurrence relation	رتبة علاقة ارتدادية
Ordinary generating function	الدالة المولدة العادية

P

Partitions of positive integers	تجزئات الأعداد الصحيحة
Partitions of sets	تجزئات المجموعات
Pascal's identity	متطابقة باسكال
Permutation	تبديل
Permutation group	زمرة تباديل
Perpendicular bisector	منصف عامودي
Pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام

R

Radian	راديان
Ramsey numbers	أعداد رمزي
Rectangle	مستطيل
Recurrence relation	علاقة ارتدادية
Reflection	إنعكاس

Regular octahedron	ثماني وجوه منتظم
Regular polygon	مضلع منتظم
Regular solid	مجسم منتظم
Regular tetrahedron	رباعي وجوه منتظم
Rotation	دوران
Rotation group	زمرة الدوران

S

Sequence	متتالية
Simple	بسيط
Space	الفضاء
Square	مربع
Stabilizer	مُقِر
Stirling numbers of the second kind	أعداد ستيرلنج من النوع الثاني
Subgroup	زمرة جزئية
Superposition principle	مبدأ التراكب
Symmetric group	زمرة التناظر
System of distinct representatives	مجموعة ممثلات مختلفة

T

Term	حدّ
The distribution model of counting	نموذج التوزيع للعد
The inclusion-exclusion principle	مبدأ التضمين و الاقصاء

The rule of correspondence	مبدأ التقابل
The rule of product	مبدأ حاصل الضرب
The rule of sum	مبدأ المجموع
The sample model of counting	نموذج العينة للعد
Transpose	منقول
Triangle	مثلث
Triangulation	مثالثة
Type	نمط

V

Vertex	رأس

كشاف الموضوعات

www.ksu.edu.sa

ردمك: ٥- ٨٣٢- ٥٥ - ٩٩٦٠-٩٧٨
ISBN: 978-9960-55-832-5